UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JULIO DE MESQUITA"

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Cálculo I

Notas de Aula

Prof. Daniel Borin

2022

Plano da Disciplina

Este documento contém notas de aulas referentes à disciplina de Cálculo I ministradas no ensino superior. O curso abrange os principais tópicos abordados deste tópico para cursos de Engenharia, Ciências da Computação e áreas afins, de tal forma que tal material não possui um foco em demonstrações e sim em exemplos e aplicação de técnicas.

O curso foi divido em 12 aulas de 4 horas cada, onde cada aula possui os seguintes objetivos:

- Aula 1
  - **Objetivos**:
  - Apresentar uma revisão de alguns conceitos de matemática básica
- Aula 2
  - **Objetivos**:
  - Estudar os conjuntos numéricos, Intervalo e Inequações
  - Introduzir o conceito de Funções e evidenciar algumas operações com funções.
  - Apresentar as funções Afim, Quadrática, Constante e Modular.
- Aula 3
  - **Objetivos**:
  - Introduzir as funções trigonométricas
  - Realizar um estudo sobre função exponencial e logarítmica.
  - Apresentar o conceito de função inversa e composta.
- Aula 4
  - **Objetivos**:
  - Estudar o conceito de continuidade.
  - Apresentar a definição de limite e apresentar algumas propriedades.
- Aula 5
  - **Objetivos**:
  - Introduzir o conceito de limites laterais.
  - Estudar o limite de funções compostas.
  - Enunciar o teorema do Confronto.
  - Estender o conceito de limite para o infinito.
- Aula 6
  - **Objetivos**:
  - Apresentar o conceito de derivada.
  - Estudar as derivadas de funções exponenciais, logaritmicas e Poliniminais
- Aula 7
  - **Objetivos**:
  - Realizar estudo das derivadas das funções trigonométricas.
  - Estudar as regras de derivação do produto e quociente.
  - Apresentar a relação entre diferenciabilidade e continuidade.
- Aula 8
  - **Objetivos**:

- Estudar a regra da cadeia que nos permite derivar funções compostas.
- Aprender a derivar funções do tipo $f(x)^{g(x)}$

- Aula 9
  - **Objetivos**:
  - Realizar a derivação de funções implícitas.
  - Efetuar um estudo de derivadas de funções inversas.
  - Aprender a calcular derivadas de ordem superior.
- Aula 10
  - **Objetivos**:
  - Apresentar a regra de L'Hopital que no permite resolver limites que trazem indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.
  - Introduzir o Teorema de Weierstass, Teorema do Valor intermediário e o Teorema de Bolzano.
  - Estudar o Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio.
- Aula 11
  - **Objetivos**:
  - Realizar um estudo dos intervalos de Crescimento e descrescimento de funções.
  - Introduzir o conceito e formas de determinar concavidades e pontos de inflexão.
- Aula 12
  - **Objetivos**:
  - Introduzir os conceitos e resultados sobre máximos e mínimos.
  - Estudar problemas de otimização matemática.

Para um curso de 60 horas, esse conteúdo pode ser apresentado em 48 horas, sobrando assim 12 horas para o docente se organizar para aplicar provas e aulas de exercício/revisão.

Para a fixação do conteúdo fora construídas 5 listas.

- **Lista 1**: Aula 1 até 3
- **Lista 2**: Aula 3 até 6.1
- **Lista 3**: Aula 6.2 até 9
- **Lista 4**: Aula 10 até 11
- **Lista 5**: Aula 12

A aula 6 aparece nas Lista 2 e 3, pois na primeira é cobrado a definição do conceito que é através de limite (tópico referente a Lista 2) enquanto na Lista 3 são exercícios de fixação das regras de aplicação da ferramenta. Todas as listas se encontram neste Material.

Sumário Aulas

Súmario Conteúdo

Aula 1

Objetivos:

→ Apresentar uma revisão de alguns conceitos de matemática básica.

Revisão

Operações Elementares

• Adição e Subtração

Sinais iguais: Somam-se os valores absolutos e dá-se o sinal comum

Sinais diferentes: Subtraem-se os valores absolutos e dá-se o sinal do maior.

▶ EXEMPLO:

a) $2+4=6$; b) $-2-4=-6$; c) $4-2=2$

d) $-4+2=-2$

• Multiplicação e Divisão

Sinais iguais ⟶ resposta positiva

Sinais diferentes ⟶ resposta negativa

$$\boxed{\begin{array}{l}(+)\cdot(+)=(+)\\(-)\cdot(-)=(+)\\(+)\cdot(-)=(-)\\(-)\cdot(+)=(-)\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l}(+):(+)=(+)\\(-):(-)=(+)\\(+):(-)=(-)\\(-):(+)=(-)\end{array}}$$

a) $4\cdot 2=8$; b) $(-4)\cdot 2=-8$; c) $(-4):(-2)=2$.

d) $(+4):(-2)=-2$.

Expressões Numéricas

Para resolver expressões númericas devemos realizar as operações na seguinte ordem

"interior para o exterior"

1º: ( ) parênteses

2º: [ ] colchetes

3º: { } chaves

4º: Multiplicação e divisão

▶ EXEMPLO:

a) $2+[2-(3+2)-1] = 2+[2-5-1] = 2+[-4] = 2-4 = -2$.

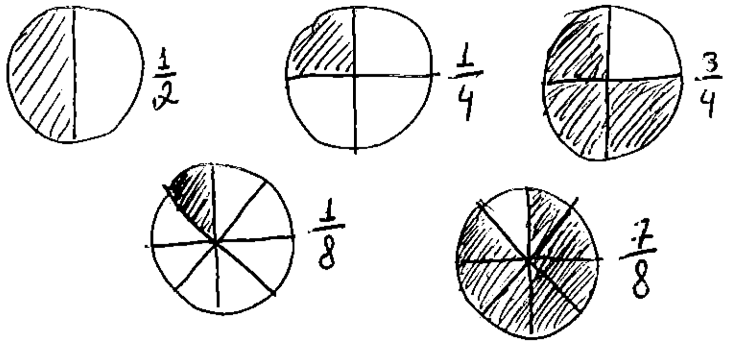
b) $2+\{3-[(1+2)+(-5+4)]+8\} = 2+\{3-[3+(-1)]+8\} = 2+\{3-4+8\}$

$= 2+7 = 9$

c) $\{2-[3\cdot 4:2-2(3-1)]\}+1 = \{2-[3\cdot 4:2-2\cdot 2]\}+1 = \{2-[12:2-4]\}+1$

$= \{2-[6-4]\}+1 = \{2-[2]\}+1 = \{0\}+1 = 1$.

Frações



As frações correspondem a uma representação das partes de um todo.

$\frac{a}{b}$ $a \longrightarrow$ numerador, $b \longrightarrow$ denominador

Equivalência de Frações

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot c}{b\cdot c}$$

$$\frac{1}{0} = \nexists \qquad \frac{a}{1} = a$$

$$\frac{0}{a} = 0.$$

▶ Exemplo:

a) $\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 2} = \frac{2}{4}$; b) $\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5} = \frac{15}{20}$; c) $\frac{20}{30} = \frac{2\cdot 10}{3\cdot 10} = \frac{2}{3}$; d) $-\frac{4}{8} = -\frac{4\cdot 1}{4\cdot 2} = -\frac{1}{2}$

Adição e Subtração de Frações

No caso de frações com mesmo denominador, basta adicionar ou subtrair os numeradores e manter o denominador

▶ Exemplo:

a) $\frac{5}{6}+\frac{1}{6}-\frac{7}{6} = \frac{5+1-7}{6} = -\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{7}{8} = \frac{7}{8}$.

Agora, se as frações tiverem denominadores diferentes devemos encontrar frações equivalentes de forma que todas as frações obtenham o mesmo denominador.

Uma das formas de encontrarmos essas frações equivalentes de mesmo denominado é a seguinte

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a\cdot df}{b\cdot df}+\frac{c\cdot bf}{d\cdot b\cdot f}+\frac{e\cdot bd}{f\cdot b\cdot d}=\frac{adf+cbf+ebd}{bdf}$$

▶ EXEMPLO:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$; $\cancel{b)\ \frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=}$

b) $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 6\cdot 3}{2\cdot 6\cdot 3}+\frac{5\cdot 2\cdot 3}{6\cdot 2\cdot 3}-\frac{2\cdot 2\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 6}=\frac{18}{36}+\frac{30}{36}-\frac{24}{36}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$

A desvantagem desse método é quando temos valores ~~muitos~~ grandes nos denominadores das frações ~~temos~~ segue que a fração resultante terá altos valores e será difícil simplificá-la.

Apresentaremos agora o método do mínimo múltiplo comum (m.m.c) que consiste em encontrar o menor número divisível por todos os denominadores.

12, 16, 8	2
6, 8, 4	2
3, 4, 2	3
1, 4, 2	2
, 2, 1	2
1	48

$\boxed{m.m.c(12,16,8)=48.}$

▶ EXEMPLO:

a) $\frac{9}{2}+\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 9+5}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{16}{3}$

2, 6	2
1, 3	3
1	6

m.m.c(2,6) = 6

b) $\frac{1}{2}+\frac{3}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{3\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1}{6}=\frac{3+6+1}{6}=\frac{1}{6}$

$=\frac{5\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{5}{3}$

2, 3, 6	2
1, 3, 3	3
1, 1	6

m.m.c(2,3,6) = 6

Multiplicação e Divisão de Frações

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

inverter a segunda fração

EXEMPLO:

a) $\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{14}$; b) $4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{1} \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-8}{3}$

c) $\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{1}\right) = \frac{-4}{3}$; d) $\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} / \frac{3}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Expressões Algébricas

- Expressões matemáticas formadas por letras ou números com letras são chamadas de expressões algébricas
- Expressões formadas por um único termo são chamadas de <u>mônomio</u>.
- Expressões formadas por uma soma de monônio ~~ou~~ chama-se <u>polinômio</u>.

$$-7\,a^2 b$$

coeficiente

Variável ou parte literal

Termo. termo

Operações com Polinômios

- **Adição e Subtração de Polinômios**

↳ Somente é possível somar ou subtrair termos semelhantes.
Para isso, repete-se a parte literal e opera-se com os coeficientes.

$$\boxed{ax^n + bx^n + cx + dx = (a+b)x^n + (c+d)x}$$

▶ EXEMPLO:

a. $3x^2y - 4xy^2 + 7xy^2 + 5x^2y = 8x^2y + 3xy^2$

b. $3x + 7x - x - 10x = -x$

c. $(x^2 - 5x + 6) - (3x^2 + x - 1) = x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x + 1$

$= -2x^2 - 6x + 7$

- **Multiplicação de Polinômios**

↳ Multiplicam-se os coeficientes e, a seguir, multiplicam-se as partes literais (soma os expoentes)

$$(ax^n)\cdot(bx^m) = (a\cdot b)\cdot(x^{n+m})$$

▶ EXEMPLO:

a. $(-3a^2y)\,.\,(+2ay) = -6a^3y^2$

b. $2x\,.\,(5x + 4) = 10x^2 + 8x$

c. $(2x + 1).(4x - 3) = 8x^2 - 6x + 4x - 3 = 8x^2 - 2x - 3$

- **Divisão de Polinômio Por Monômio**

↳ Separa cada monômio do polinômio do numerador e divide pelo monomio do denominador. Assim, com cada termo divide-se o coeficiente numérico e a parte literal correspondente (subtrai o expoente)

$$\frac{ax^n + bx^a + cx}{dx^m} = \frac{ax^n}{dx^m} + \frac{bx^a}{dx^m} + \frac{cx}{dx^m} = \frac{a}{d}x^{n-m} + \frac{b}{d}x^{a-m} + \frac{c}{d}x^{1-m}$$

▶ EXEMPLO:

a. $(+6x^3) : (-2x) = -3x^2$

b. $(-8a^4b^3c) : (-12a^2b^2c) = \frac{-\cancel{8}}{-\cancel{12}}\,a^2b = \frac{2}{3}\,a^2b$ ($: 4$)

Produtos Notáveis

↳ São produtos de polinômios especiais

• Quadrado da soma de dois termos

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

1º Termo: a

2º Termo: b

Quadrado do primeiro termo,	+ o dobro do produto do 1º pelo 2º termo.	+ quadrado do segundo termo

Podemos dizer que:

"O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo."

▶ EXEMPLO:

a. $(2 + x)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + x^2 = 4 + 4x + x^2$

b. $(7x + 2y)^2 = 49x^2 + 28xy + 4y^2$

c. $x^2 + 20x + 100 = (x + 10)^2$

• Quadrado da diferença de dois termos

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Podemos dizer que:

"O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo."

▶ **Exercícios resolvidos:**

a. $(x - 3) = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3) + (-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

b. $(7x - 2y)^2 = 49x^2 - 28xy + 4y^2$

Produto da soma pela diferença de dois termos

$$\boxed{(a + b) \, . \, (a - b) = a^2 - b^2}$$

Podemos dizer que:

"O produto da soma de dois termos por sua diferença é igual ao quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo."

EXEMPLO

a. $(1 - \sqrt{3}) \, . \, (1 + \sqrt{3}) = 1^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 - 3 = -2$

b. $(7x + 2y) \, . \, (7x - 2y) = 49x^2 - 4y^2$

c) $a^2 - 9 = (a - 3)(a + 3)$

Fatoração

Fatorar um polinômio é escrevê-lo sob a forma de um produto. Fazemos isso colocando em evidência um fator que apareça em ambos os termos

1. $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$
$= (x + y)(a + b)$

2. $2mx - 5ny - 2nx + 5my = -n(5y + 2x) + m(2x + 5y)$
$= (5y + 2x)(m - n)$

Frações Algébricas

Uma fração algébrica corresponde ao quociente de duas expressões algébricas. Observe:

$$\frac{x}{y} \qquad \frac{2x+1}{y-4} \qquad \frac{9a^2-7}{a+1}$$

O conjunto dos números reais para os quais o denominador de uma fração algébrica é *diferente de zero* é denominado ***domínio*** ou ***campo de existência*** da fração.

Assim, para a fração $\frac{x^2+y^2}{x-3}$, o *campo de existência* é qualquer número real diferente de 3, já que a fração não tem nenhum significado quando $x = 3$, pois anula o seu denominador.

EXEMPLO: (Simplicação de Frações).

a) $\dfrac{24x^4y^3z}{18x^2y^4} = \dfrac{4\cdot 6\cdot x^2 z}{3\cdot \cancel{6}y} = \dfrac{4x^2z}{3y}$

b) $\dfrac{x^2+x}{2x+2} = \dfrac{x(x+1)}{2(x+1)} = \dfrac{x}{2}$

c) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2} = \dfrac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2} = \dfrac{a+b}{a-b}$

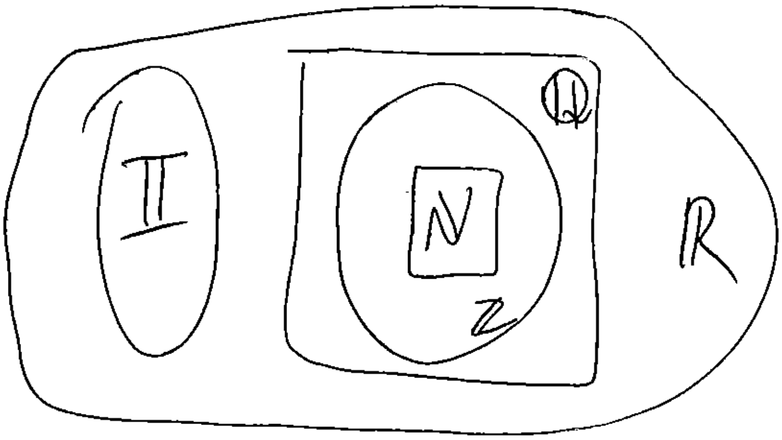
Aula 2

Objetivos:

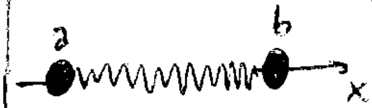
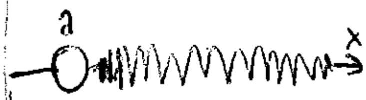
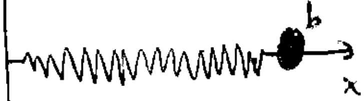
- Estudar os conjuntos numéricos, e Intervalos e Inequações
- Introduzir o conceito de funções e evidênciar algumas operações com funções.
- Apresentar as funções Afim, e Quadratica, Constante e Modular.

Conjuntos

- Números Naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Números Inteiros: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Números Racionais: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$
- Números Irracionais: $\mathbb{I} = \{$ dízimas não-periodicas $\}$ Ex: $\sqrt{2}, \pi$.
- Números Reais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$



Intervalos

	$a<x<b$	$]a,b[$
	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,b]$
	$a<x\leqslant b$	$]a,b]$
	$x>a$	$]a,+\infty[$
	$x\leqslant b$	$]-\infty,b]$

Inequações e Estudo de Sinais

Sejam x,y,z,w números reais quaisquer então.

i) $x<y \iff x+z<y+z$

ii) $z>0 \iff z^{-1}>0$

iii) $z>0 \implies -z<0$

iv) se $z>0$, então $x<y \iff xz<yz$

v) se $z<0$, então $x<y \iff xz>yz$

↳ Multiplicando ambos os lados de uma desigualdade por um mesmo número negativo ~~então~~ temos que o sentido da desigualdade muda.

vi) $\begin{cases} 0\leqslant x<y \\ 0\leqslant z<w \end{cases} \implies xz<yw$

vii) $0<x<y \iff 0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$

EXEMPLO: Resolvemos a inequação

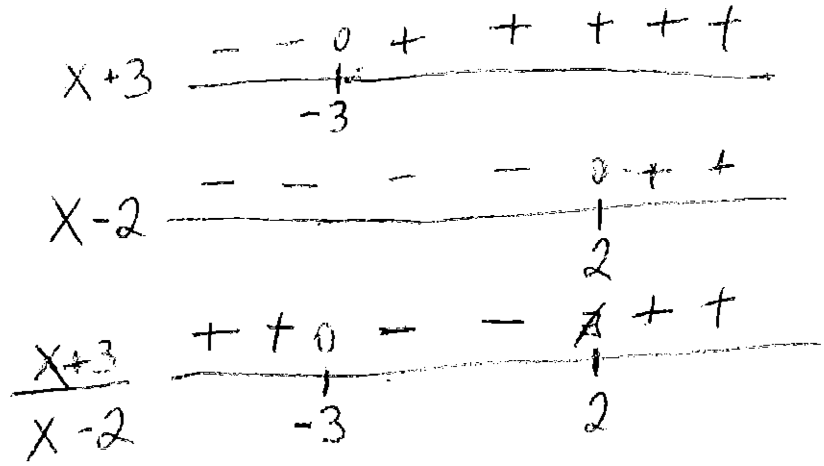
$$5x+3<2x+7$$

Pois bem,

$$5x+3<2x+7 \iff 5x<2x+4 \iff 3x<4 \iff \boxed{x<\frac{4}{3}}$$

Exemplo: Estudemos o sinal de $\frac{x+3}{x-2}$

Pois bem,



Portanto,

$$\begin{cases} \frac{x+3}{x-2}>0 \text{ para } x<-3 \text{ ou } x>2; \\ \frac{x+3}{x-2}<0 \text{ para } -3<x<2 \\ \frac{x+3}{x-2}=0 \text{ para } x=-3. \end{cases}$$

EXEMPLO: Resolvemos a inequação:

$$\frac{2x+1}{x-4}<0 \qquad (\star)$$

Inicialmente, estudemos o sinal da expressão acima

$$\begin{array}{l|ccccccc}
2x+1 & - & 0 & + & + & + & + \\
 & & -\frac{1}{2} & & & & \\
x-4 & - & & - & - & & + \\
 & & & & & 4 & \\
\frac{2x+1}{x-4} & + & -\frac{1}{2} & - & - & \nexists\ (4) & +
\end{array}$$

Assim, $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < 4\}$ é o conjunto solução da inequação (A)

EXEMPLO: Resolvemos a inequação $\frac{3x-1}{x+2} \geq 5$.

Primeiramente, note que

$$\frac{3x-1}{x+2} \geq 5 \iff \frac{3x-1}{x+2} \geq \frac{5(x+2)}{(x+2)},\ p/\ x \neq -2 \iff \frac{3x-1-5x-10}{x+2} \geq 0$$

$$\iff \frac{-2x-11}{x+2} \geq 0 \iff \frac{2x+11}{x+2} \leq 0 \qquad (\wp)$$

Estudemos então o sinal da inequação $(\wp)$.

$$\begin{array}{l|ccccc}
2x+11 & - & 0\ (-\frac{11}{2}) & + & & + \\
x+2 & - & - & - & 0\ (-2) & + \\
\frac{2x+11}{x+2} & + & 0\ (-\frac{11}{2}) & - & \nexists\ (-2) & +
\end{array}$$

Assim, $\frac{2x+11}{x+2} \leq 0 \iff -\frac{11}{2} \leq x < -2$. Logo, $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{11}{2} \leq x < -2\}$ é o conjunto das soluções da inequação dada.

- **ATENÇÃO:**

$\hookrightarrow$ $\frac{3x-1}{x+2} \geq 5$ NÃO é equivalente a $3x-1 \geq 5(x+2)$

Para $x > 2$ a afirmação é verdadeira, pois $x > -2 \Rightarrow x+2 > 0$, logo quando multiplicamos ambos os lados por $x+2$, a desigualdade se mantém:

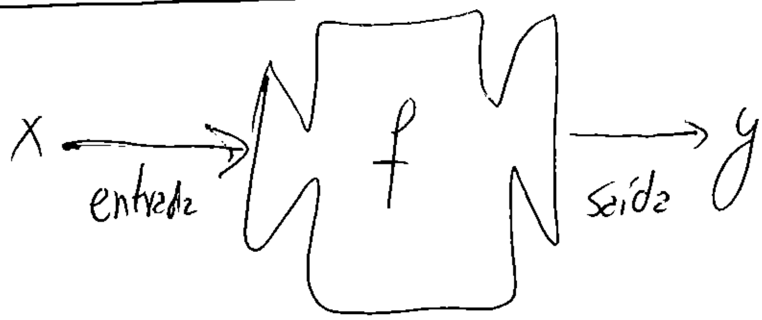
$$\underbrace{(x+2)}_{>0} \cdot \frac{3x+1}{x+2} \geq 5 \cdot \underbrace{(x+2)}_{>0} \iff 3x-1 \geq 5(x+2)$$

Para $x < -2$, as coisas mudam pois neste caso temos $x < -2 \Rightarrow x+2 < 0$, logo quando multiplicamos ambos os lados por $x+2$, a desigualdade se altera.

$$\underbrace{(x+2)}_{<0} \frac{3x+1}{x+2} \geq 5 \cdot \underbrace{(x+2)}_{<0} \iff 3x-1 \leq 5(x+2).$$

Função

DEFINIÇÃO [Função] Sejam A e B dois conjuntos não-vazios. Uma função f definida em A e com valores em B é uma regra que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$.



Nomenclaturas

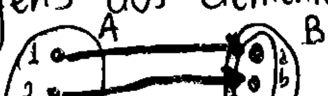
- **Notação:**
  - $f: A \longrightarrow B$ tal que $y = f(x)$.
  - $f: A \longrightarrow B$
    $x \longrightarrow f(x)$

- Dizemos, neste caso, que x é a <u>variável independente</u> e $y = f(x)$ a <u>variável dependente</u>

- Domínio: Conjunto dos elementos que possuem imagem.
  - $D(f) = A$

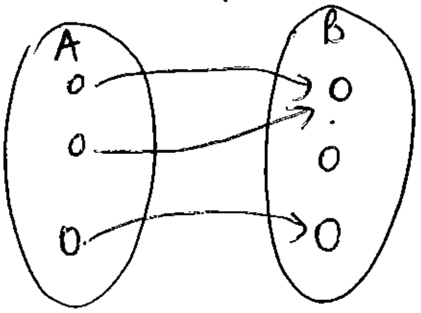
- Contradomínio: Conjunto dos elementos que se colocam à disposição para serem ou não imagens dos elementos de A.
  - $CD(f) = B$

- Imagem: Subconjunto do conjunto B formado por todos os elementos que são imagens dos elementos do conjunto A.

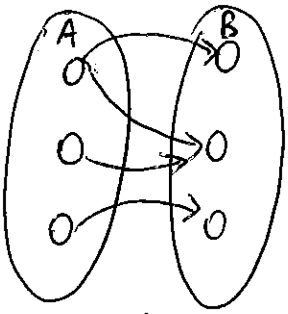


$D(f) = A$; $CD(f) = B$

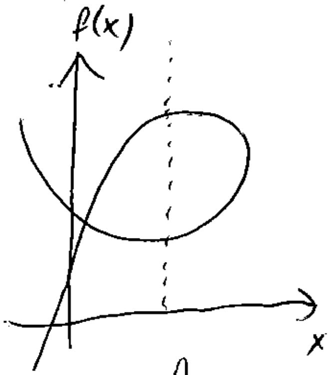
Exemplos:



função



Não função

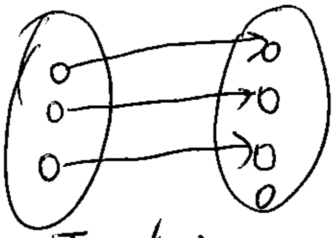


Não função

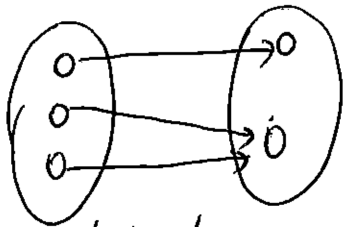
função.

Classificação

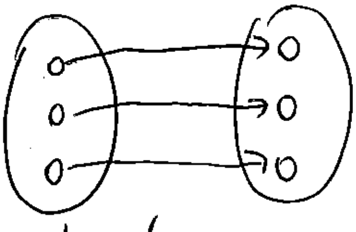
Classificação	Condição
Par	$f(-x)=f(x);\ \forall x \in D$
Impar	$f(-x)=-f(x);\ \forall x \in D$
Crescente	$X_2 \geq X_1 \Rightarrow f(X_2) \geq f(X_1);\ \forall x \in D$
Estrit. crescente	$X_2 > X_1 \Rightarrow f(X_2) > f(X_1);\ \forall x \in D$
Decrescente	$X_2 \geq X_1 \Rightarrow f(X_2) \leq f(X_1);\ \forall x \in D$
Estrit. decrescente	$X_2 > X_1 \Rightarrow f(X_2) < f(X_1);\ \forall x \in D$
Injetora	$X_1 \neq X_2 \Rightarrow f(X_1) \neq f(X_2);\ \forall x \in D$
Sobrejetora	$Im = CD$
Bijetora	Injetora e Sobrejetora



Injetora



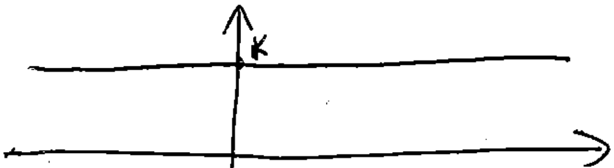
Sobrejetora



bijetora

Funções Elementares

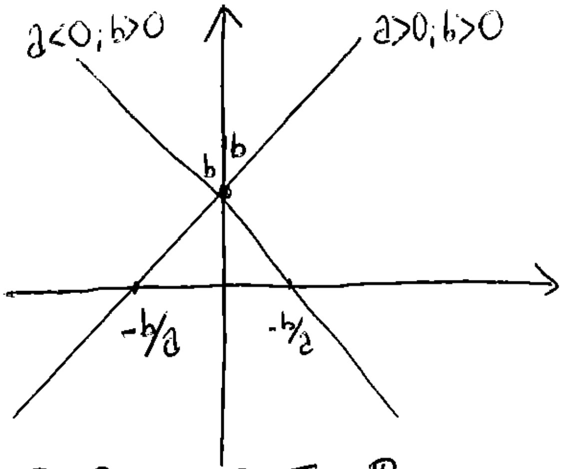
- Função Constante
  - $f(X)=K$, onde K é uma constante
  - $D=\mathbb{R}$; $CD=\mathbb{R}$ e $Im=\{K\}$



Função de 1º Grau

↳ função afim

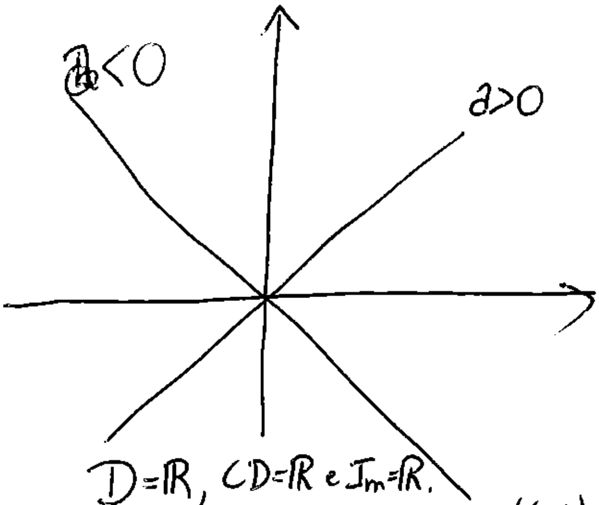
$f(x) = ax+b$, onde a,b são constantes



$D=\mathbb{R}$, $CD=\mathbb{R}$, $Im=\mathbb{R}$

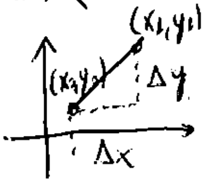
↳ função linear

$f(x) = ax$, onde a é uma constante.



$D=\mathbb{R}$, $CD=\mathbb{R}$ e $Im=\mathbb{R}$.

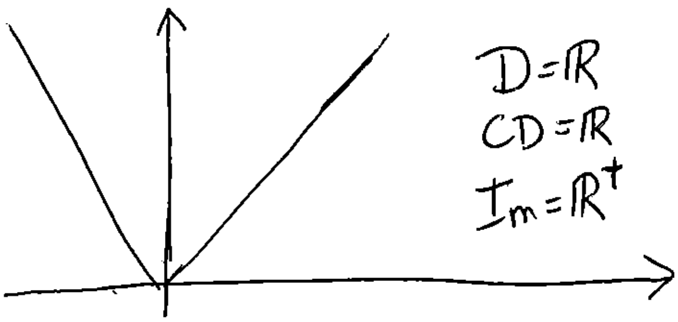
a ⟶ coeficiente angular ⟶ $a = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$



b ⟶ coeficiente linear.

Função Módulo

↳ $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x>0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$

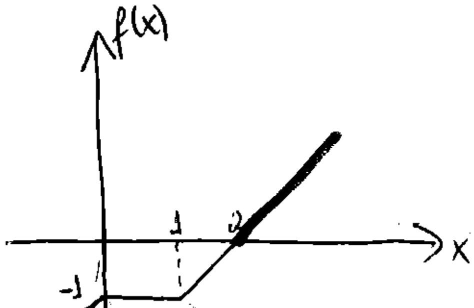


$D=\mathbb{R}$

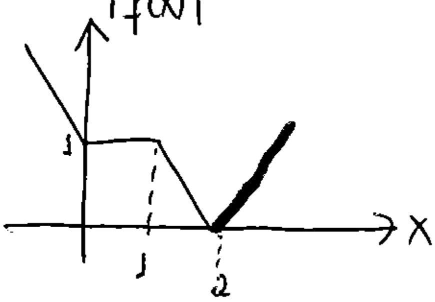
$CD=\mathbb{R}$

$Im=\mathbb{R}^+$

▶ EXEMPLO

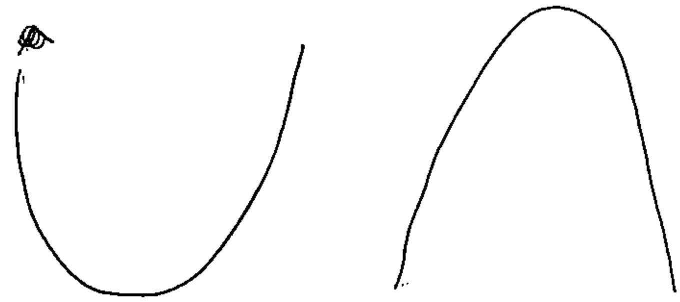


$\Longrightarrow$



• Função de 2º grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



$a>0$ $\qquad$ $a<0$.

$D = \mathbb{R}$, $CD = \mathbb{R}$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.

• Raízes

↳ São os valores de x tais que $f(x) = 0$.

Assim, queremos encontrar valores de x tais que

$$ax^2 + bx + c = 0 \underset{\substack{\text{multiplicando} \\ \text{por } a \\ \text{ambos os} \\ \text{lados}}}{\Longrightarrow} a^2x^2 + abx + ac = 0. \quad (1)$$

Notemos que

$$\underbrace{a^2x^2}_{(ax)^2} \underbrace{+abx}_{+2\cdot(ab)\cdot\left(\frac{b}{2}\right)} + \underbrace{\frac{b^2}{4}}_{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2$$

é um quadrado perfeito. Assim, tendo em vista utilizá-lo em (1), iremos somar aos dois membros da igualdade o número $\frac{b^2}{4}$. Assim

$$a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4} + ac = \frac{b^2}{4} \Longrightarrow \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + ac = \frac{b^2}{4} \Rightarrow \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

Denominando $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$, como discriminante, temos

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\Delta}{4} \Longrightarrow ax + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}} \Rightarrow ax + \frac{b}{2} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \longrightarrow$$

$$\Rightarrow ax = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} \Longrightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Agora

$\Delta > 0 \longrightarrow$ duas raízes reais e distintas

$\Delta = 0 \longrightarrow$ uma única raiz real

$\Delta < 0 \longrightarrow$ A equação não terá raízes reais

Relações de Girar (Soma e Produto)

Sabemos que as raízes são dadas por $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Assim

$$\Rightarrow S = x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-b-b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow P = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}-4ac}{4a^2} = \frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a}a^{\cancel{2}}} = \frac{c}{a}$$

Ou seja

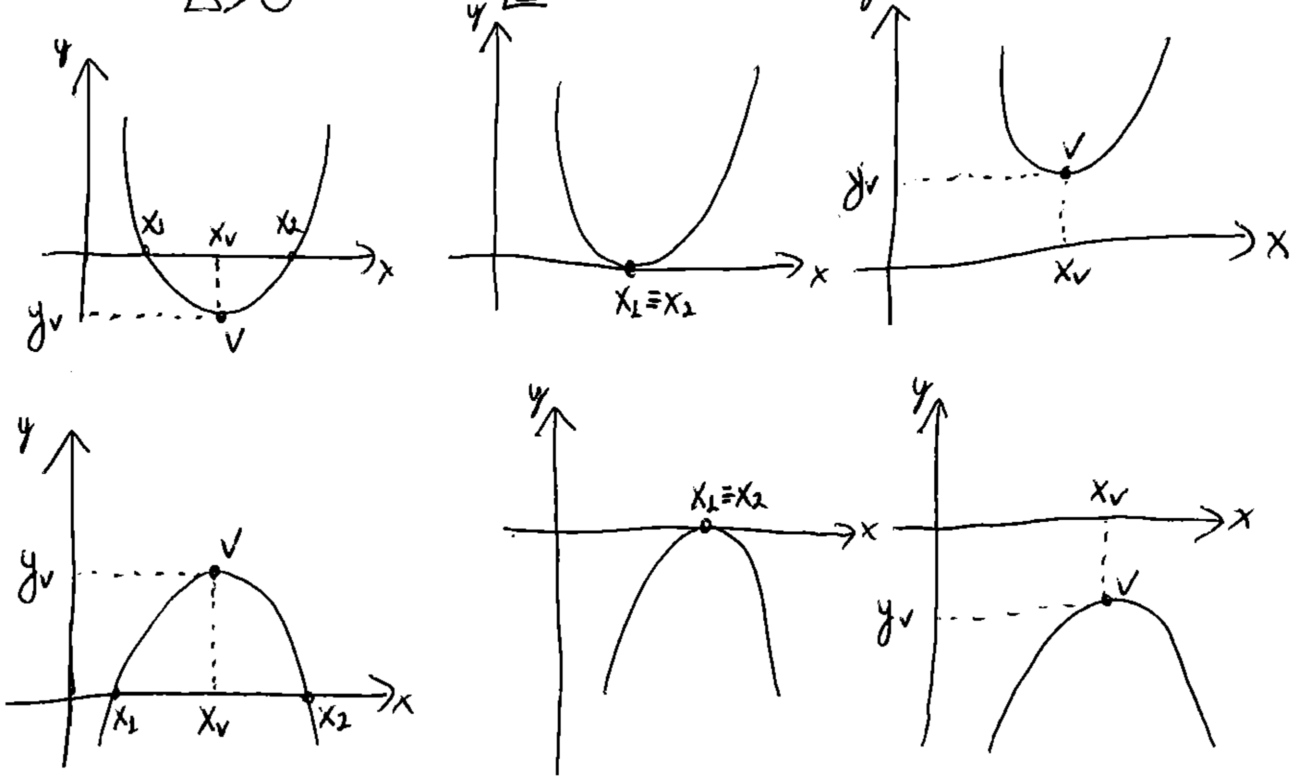
$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}}$$

Gráfico da função Quadrática

$\Delta > 0$ $\quad$ $\Delta = 0$ $\quad$ $\Delta < 0$

$a > 0$

$a < 0$



Imagem

$a > 0 \longrightarrow Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$

$a < 0 \longrightarrow Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\}$

Coordenadas vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Aula 3

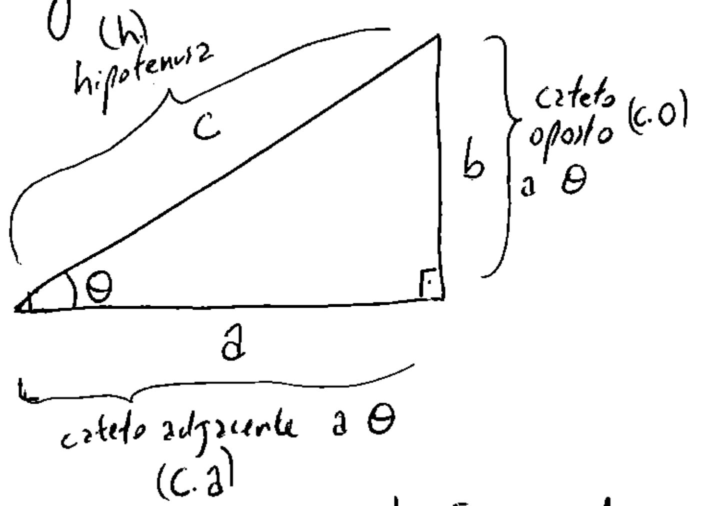
Objetivos:

- Introduzir as funções trigonométricas
- Realizar um estudo sobre função exponencial e Logarítmica
- Apresentar o conceito de função inversa e composta.

Funções Trigonométricas

■ Seno, cosseno e tangente n

Dado um triângulo retângulo, podemos definir as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente como



- $\text{sen}\,\theta = \frac{co}{h} = \frac{b}{c}$
- $\cos\theta = \frac{ca}{h} = \frac{a}{c}$
- $\tan\theta = \frac{co}{ca} = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}}$

De posse dessas relações podemos definir também

- Secante: $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
- Cossecante: $\text{cossec}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$
- Cotangente: $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$.

■ Ângulos notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Propriedades

(Relação Fundamental)

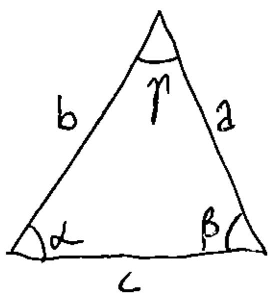
↳ $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Dem:
De pitágoras $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow (c\cdot\cos\theta)^2+(c\cdot\text{sen}\,\theta)^2=c^2 \Rightarrow c^2\cdot(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)=c^2 \Rightarrow \cos^2\theta+\text{sen}^2\theta=1$

↳ $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ ↳ $\text{sen}(-\theta)=-\text{sen}(\theta)$ ↳ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

↳ $1+\text{cotan}^2\theta=\text{cosec}^2\theta$ ↳ $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$ ↳ $\text{sen}(\alpha\pm\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta\pm\text{sen}\,\beta\cos\alpha.$

Lei dos Senos e Cossenos



↳ Lei dos senos:

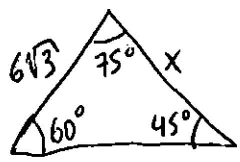
$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha}=\frac{b}{\text{sen}\,\beta}=\frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

↳ Lei dos cossenos

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha.$$

▶ **EXEMPLO:**

Qual o valor de x?

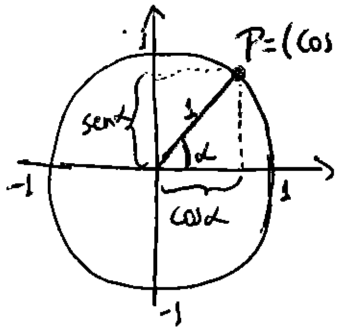


Sol: Pela lei dos senos

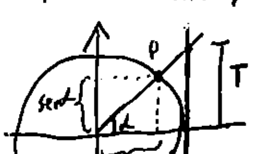
$$\frac{x}{\text{sen}\,60^\circ}=\frac{6\sqrt{3}}{\text{sen}\,45^\circ}\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{3}/2}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}/2}\Rightarrow x=\frac{18}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow x=9\sqrt{2}$$

Circunferência trigonométrica

Devido a propriedade da relação fundamental, podemos interpretar as funções trigonométricas seno e cosseno, como um ponto dentro de uma circunferência unitária.



De forma semelhante, temos p/ a tangente a seguinte interpretação.



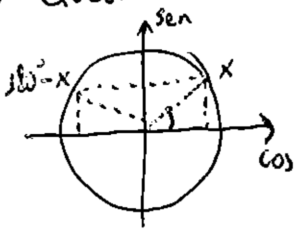
Semelhança de triângulos

$$\frac{1}{\ldots}=\frac{T}{\ldots}\Rightarrow T=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\ldots}=\tan\alpha.$$

Simetria de arcos e redução ao primeiro

Os valores do seno e do cosseno de qualquer angulo sempre podem ser reduzidos aos valores do seno e do cosseno do primeiro quadrante

2º Quadr. → 1º Quadr.

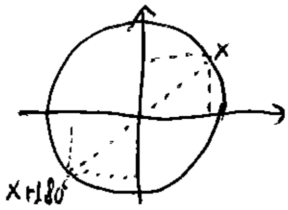


$\text{sen}(180^\circ - x) = \text{sen}\, x$

$\cos(180^\circ - x) = -\cos x$

"Calcular quanto falta p/ 180°"

3º Quadr → 1º Quad.

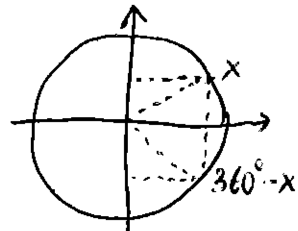


$\text{sen}(180^\circ + x) = -\text{sen}\, x$

$\cos(180^\circ + x) = -\cos x$

"calcular quanto passa de 180°"

4º Quadr → 1º Quadr.



$\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$

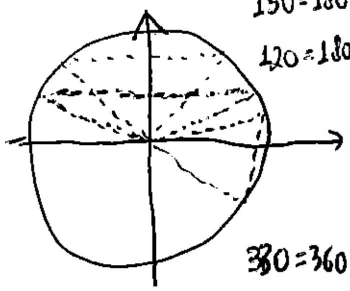
$\cos(-x) = \cos x$

"calcular quanto falta p/ 360°"

Exemplo:

Reduza ao 1º quadrante e dê o valor das funções abaixo.

1) sen 150°
2) cos 120°
3) cossec 330°



$150 = 180 - x \Rightarrow x = 30$

$120 = 180 - x \Rightarrow x = 60$

$\text{sen}(150^\circ) = \text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$

$\cos(120^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$

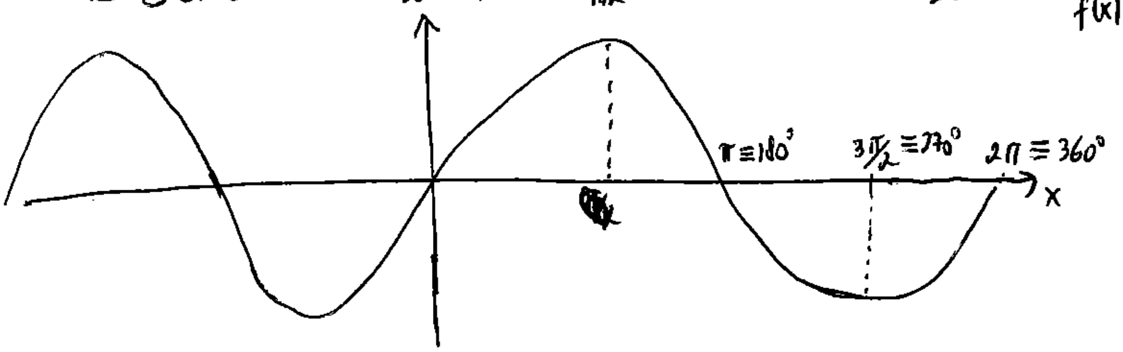
$\text{cossec}\, 330^\circ = \frac{1}{\text{sen}\, 330^\circ} = \frac{1}{-\text{sen}\, 30^\circ} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

$330 = 360 - x \Rightarrow x = 30$

Gráfico

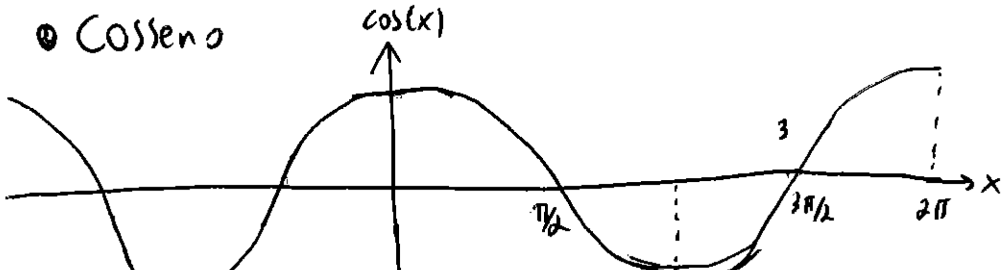
- Seno

$x = \frac{\theta \cdot \pi}{180}$ rad



$f(x) = \text{Sen}\, x$
- ↳ $D(f) = \mathbb{R}$
- ↳ $Im(f) = [-1, 1]$
- ↳ Função periódica de período 2π
- ↳ função impar $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$

- Cosseno



$f(x) = \cos x$.
- ↳ $D(f) = \mathbb{R}$
- ↳ $Im(f) = [-1, 1]$
- ↳ Função periódica de período 2π.

5

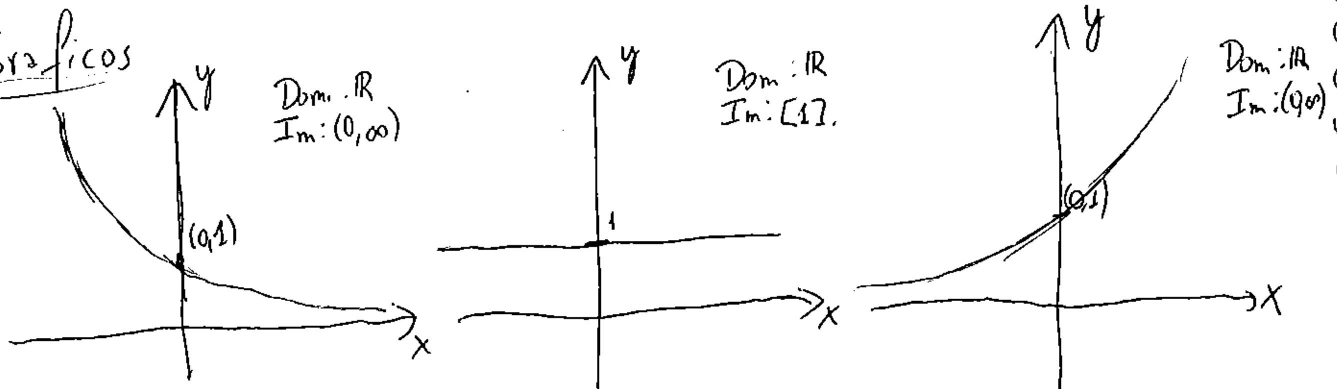
Funções Exponenciais

DEFINIÇÃO [Função Exponencial] Uma função exponencial é uma função da forma

$$f(x) = a^x, \quad p/\ x \in \mathbb{R}.$$

Onde a é uma constante positiva.

Gráficos



$y = a^x$, p/ $0<a<1$ $\qquad$ $y = 1^x$ $\qquad$ $y = a^x$, p/ $a>1$.

Propriedades dos Expoentes

Sejam a e b numeros positivos e $x, y \in \mathbb{R}$. Então

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$.

(ii) $a^{x-y} = a^x/a^y$.

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$.

(iv) $(ab)^x = a^x b^x$.

(v) $a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}$ p/ $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$.

(vi) $a>1$ e $x>y \Longrightarrow a^x < a^y$.

(vii) $0<a<1$ e $x>y \Longrightarrow a^y < a^x$.

(viii) $a^x = a^y \Longleftrightarrow x = y$

Ex. 1: $[2^{x-3}]^{x-2} = 1$

Qual a soma e produto das soluções

Sol: $2^{(x-3)\cdot(x-2)} = 2^0 \Rightarrow (x-3)(x-2)=0$

$\Rightarrow x = \{3 \text{ ou } 2$

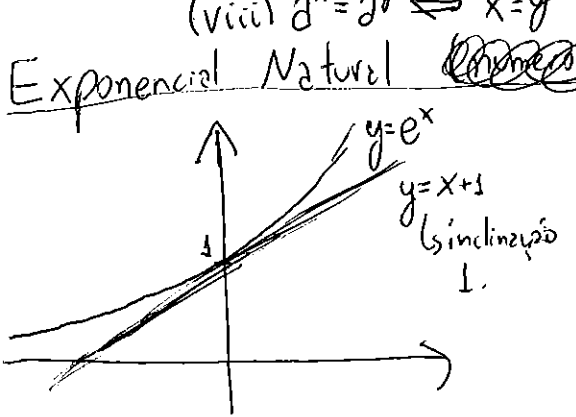
Ex: Resolva $2^{x-1} - 2^{x+2} = -56$

Sol: $2^x(2^{-1} - 2^2) = -56 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x\left(\frac{1}{2} - 4\right) = -56 \Rightarrow 2^x \cdot -\frac{7}{2} = -56$

$\Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow \boxed{x=4}$

Exponencial Natural ~~(número neperiano)~~.



Quando escolhemos como base e aquela p/ qual resulta uma reta tangente a $y = e^x$ em $(0,1)$ com uma inclinação de exatamente 1. O valor de e correto é

$$e \approx 2{,}71828\ldots$$

A função $f(x) = e^x$ é chamada função exponencial natural

5

~~Funções Logarítmicas Inversas~~

Funções Logarítmicas

Vimos da função exponencial que

$$a^c = b$$

p/ um certo valor de a, b e c. Com base nisso podemos definir

DEFINIÇÃO [Função Logarítmica] Sejam $a > 0$, $a \neq 1$ e $\beta > 0$ dois número reais quisquer. O único número real γ tal que

$$a^\gamma = \beta$$

denomina-se logaritmo de β na base a e indica-se por $\gamma = \log_a \beta$. Assim

$$\gamma = \log_a \beta \iff a^\gamma = \beta.$$

No caso de termos a base sendo o número e, indicamos tal logaritmo por $\ln$, ou seja, $\ln = \log_e$ de tal forma que

$$y = \ln x \iff e^y = x.$$

Propriedades da Função Logarítmica

Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. São validas as seguintes propriedades.

(1) $\log_a \alpha\beta = \log_a \alpha + \log_a \beta$

(2) $\log_a \alpha^\beta = \beta \log_a \alpha$

(3) $\log_a \frac{\alpha}{\beta} = \log_a \alpha - \log_a \beta.$

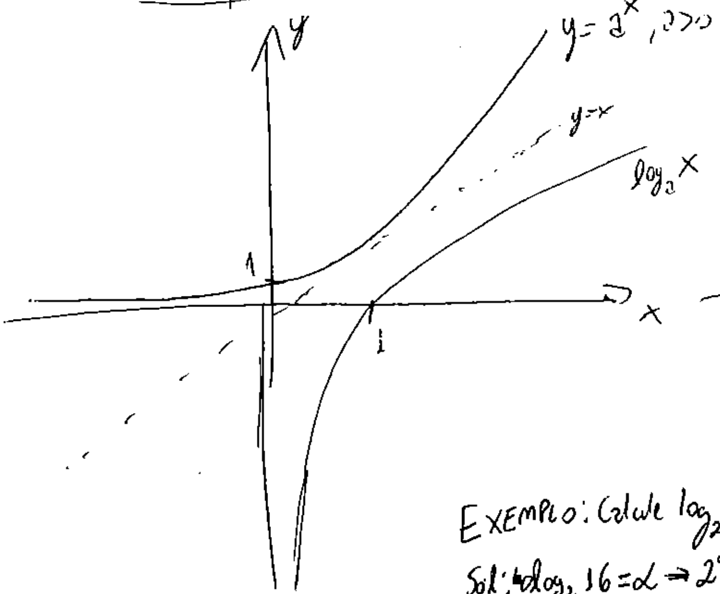
(4) $\log_a \alpha = \dfrac{\log_b \alpha}{\log_b a}$

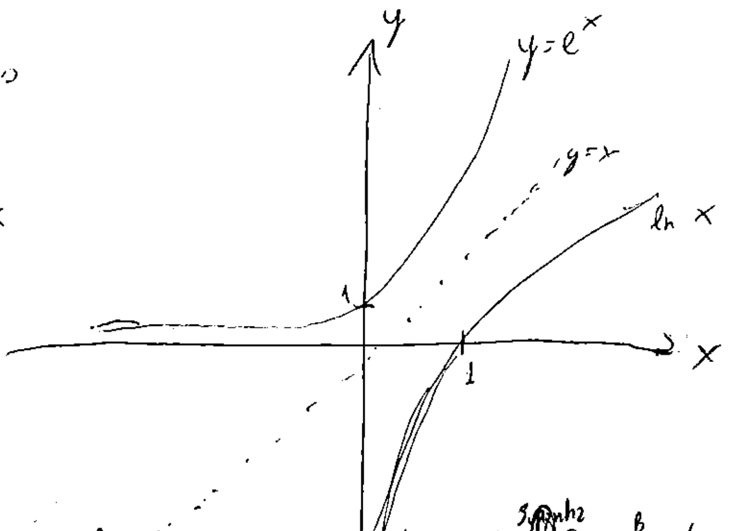
(5) Se $a > 1$ e $\alpha < \beta$, então $\log_a \alpha < \log_a \beta$

(6) Se $0 < a < 1$ e $\alpha < \beta$, então $\log_a \alpha > \log_a \beta.$

(6)

Gráfico





Simétrica por $y = x$.

EXEMPLO: Calcule $\log_2 16 - \log_4 32$

Sol: $\log_2 16 = \alpha \Rightarrow 2^{\alpha} = 16 = 2^4 \Rightarrow \alpha = 4$

$\log_4 32 = \beta \Rightarrow 4^{\beta} = 32 \Rightarrow 4^{\beta} = 2^5 \Rightarrow 2^{2\beta} = 2^5 \Rightarrow \beta = \frac{5}{2}$

Assim $\alpha - \beta = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$

Exemplo: Suponha

$y = 5 \cdot (1{,}02)^x$

Qual valor de x faz y ser 30 sabendo $\ln 1{,}02 = 0{,}02$; $\ln 2 = 0{,}7$; $\ln 3 = 1{,}10$

Sol: $30 = 5 \cdot (1{,}02)^x \Rightarrow 6 = (1{,}02)^x$

$\Rightarrow \ln 6 = \ln (1{,}02)^x \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(2 \cdot 3) = x \cdot \ln(1{,}02) \Rightarrow \ln 2 + \ln 3 = x \ln(1{,}02)$

$\Rightarrow x = (0{,}7 + 1{,}10)/0{,}02 \Rightarrow \boxed{x = 90}$

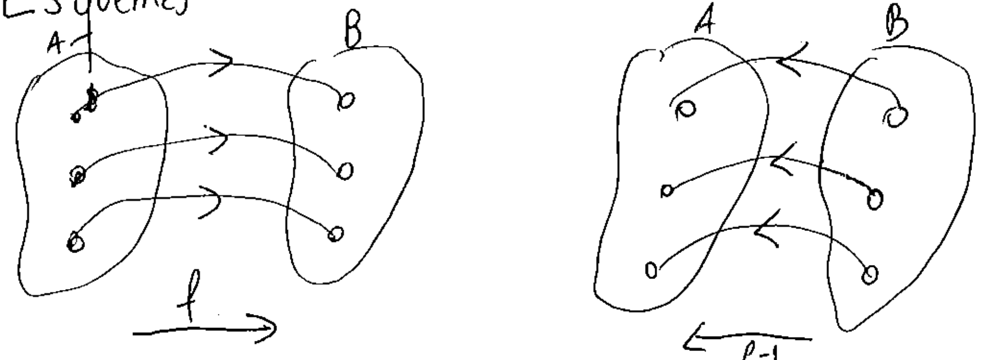
Função Inversa

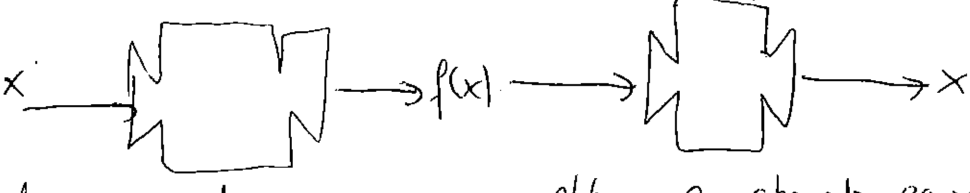
DEFINIÇÃO [Função Inversa] Seja $f: A \to B$ uma função injetora. Então, f admite uma função inversa $f^{-1}: f(A) \to A$ definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \; ; \quad \forall y \in B$$

OBS: Dizemos que uma função é injetora se para $x_1 \neq x_2$, temos que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Esquemas





DEFINIÇÃO [Função Inversa 2] Seja $f: A \to B$ uma função injetora. Então f admite uma função inversa $f^{-1}: f(B) \to A$ tal que

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{ou} \quad f(f^{-1}(x)) = x, \quad \text{ou} \quad f \circ f^{-1} = I.$$

EXEMPLO: As equações do cancelamento quando aplicadas a $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, ficam

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a x} = x, \quad \forall x > 0 \end{array}}$$

Step by Step.

Como Achar a função inversa de uma função injetora

PASSO 1. Escreva $y = f(x)$

PASSO 2. Isole x nessa equação, escrevendo-o em termos de y (se possível)

PASSO 3. Para expressar f^{-1} como uma função de x, troque x por y. A equação resultante é $y = f^{-1}(x)$.

EXEMPLO: Encontre a função inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

Solução: De acordo com o PASSO 1, escrevemos

$$y = x^3 + 2.$$

Então isolamos x nessa equação:

$$y = x^3 + 2 \Rightarrow x^3 = y - 2 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{y-2}$$

Finalmente, trocando x por y:

$$y = \sqrt[3]{x-2}$$

Portanto, a função inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$

Função Composta

Definição [Função Composta] Sejam f e g duas funções tais que $\operatorname{Im} f \subset D_g$. A função dada por

$$g \circ f = g(f(x)), \quad x \in D_f$$

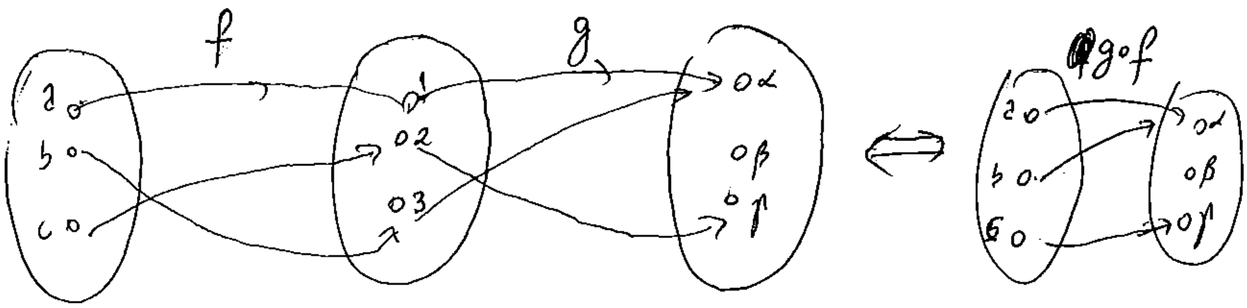
denomina-se função composta de g e f.

EXEMPLO: Seja f e g dadas por $f(x) = 2x+1$ e $g(x) = x^2+3x$. Determine $g \circ f$ e $f \circ g$.

Solução:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 3[f(x)] = (2x+1)^2 + 3(2x+1), \quad p/\ x \in \mathbb{R} = D_f.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+3x) = 2(x^2+3x)+1, \quad p/\ x \in D_g = \mathbb{R}.$$



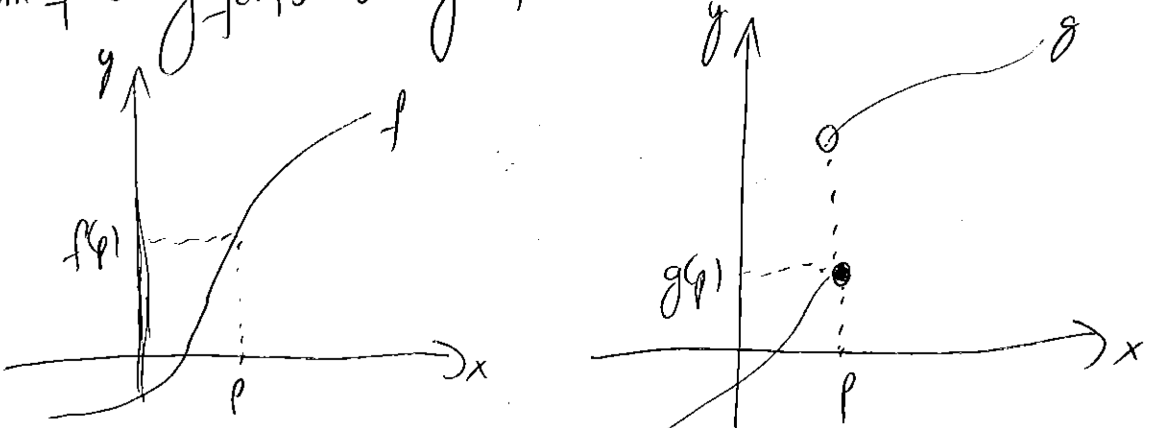
Aula 4

Objetivos:

- Estudar o conceito de continuidade
- ~~Obter~~ Apresentar a definição de limite e apresentar algumas propriedades.

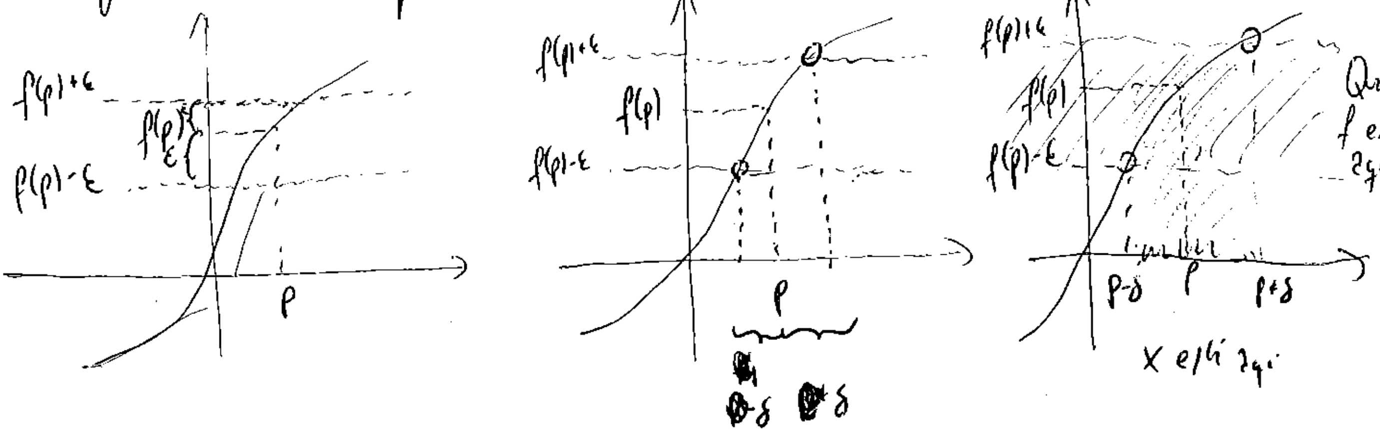
1 Definição de Função Contínua

Sejam f e g funções de gráficos

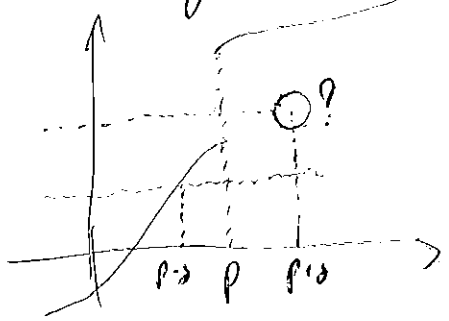


Observe que uma das funções apresenta um "salto". Desta forma queremos uma propriedade que nos permite distinguir tais comportamentos.

Peguemos então a primeira função.



Observe que a função g não satisfaz ~~(...)~~ em p tal propriedade



Logo, podemos escrever essa propriedade ~~(...)~~, formalmente como

DEFINIÇÃO [Função Contínua em p.] Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. Então dizemos que f é uma função contínua em p se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ (que depende de ε), tal que $\forall x \in D_f$,

$$|x-p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

OBS: Lembre-se que

$$|x-p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

é equivalente a dizer

$$-\delta < x-p < \delta \Longrightarrow -\varepsilon < f(x) - f(p) < \varepsilon.$$

EXEMPLO: Prove que $f(x) = 2x+1$ é contínua em $p=1$.

Solução: Precisamos provar que, para cada $\varepsilon > 0$ dado, conseguiremos um $\delta > 0$, tal que

$$1-\delta < x < 1+\delta \Rightarrow f(1) - \varepsilon < f(x) < f(1) + \varepsilon \qquad (\star)$$

Temos que o $\varepsilon > 0$ é dado, queremos encontrar $\delta > 0$. Devemos determinar $\delta > 0$ de modo que ~~(...)~~ satisfaça $(\star)$. Vamos resolver a inequação

3

$$f(1)-\varepsilon < f(x) < f(1)+\varepsilon.$$

Temos,

$$f(1)-\varepsilon<f(x)<f(1)+\varepsilon \iff 3-\varepsilon<2x+1<3+\varepsilon$$

Somando (-1) em ambos os lados e dividindo por 2, temos

$$f(1)-\varepsilon<f(x)<f(1)+\varepsilon \iff 1-\frac{\varepsilon}{2}<x<1+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, dado $\varepsilon>0$ e tomando $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ temos

$$1-\delta<x<1+\delta \implies f(1)-\varepsilon<f(x)<f(1)+\varepsilon.$$

Logo, f é contínua em $p=1$.

Notação Módulo

Precisamos provar que dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que

$$|x-1|<\delta \implies |f(x)-f(1)|<\varepsilon.$$

Temos

$$|f(x)-f(1)|<\varepsilon \iff |2x+1-3|<\varepsilon \iff |2x-2|<\varepsilon \implies |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, dado $\varepsilon>0$, tomemos $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

$$|x-1|<\delta \implies |f(x)-f(1)|<\varepsilon.$$

Logo, f é contínua em $p=1$

EXEMPLO: A função afim $f(x)=ax+b$ (a,b constantes) é contínua.

Solução: Se $a=0$, f é constante, logo contínua (ALUNOS LISTA)
Suponhamos, então, $a\neq 0$. Observe que,

$$|f(x)-f(p)|=|ax+b-ap-b|=|a||x-p|.$$

Assim, para todo $\varepsilon>0$ dado, temos que

$$|f(x)-f(p)|<\varepsilon \iff |x-p|<\varepsilon/|a|$$

Portanto, tomando, $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ dado por $\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}$ temos

$$|x-p|<\delta \implies |f(x)-f(p)|<\varepsilon.$$

4

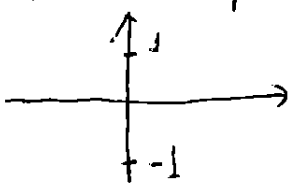
DEFINIÇÃO [Função Contínua] Sejam $f: X \subseteq \mathbb{R}$ e $Y \subset X$. Dizemos que <u>f é contínua em Y</u> se f é contínua em todo ponto $y \in Y$. Em particular, <u>f é contínua em X</u> se f é contínua em todo ponto $x \in X$

DEFINIÇÃO [Função descontínua em a] Sejam $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in X$. Dizemos que <u>f é descontínua em a</u> se f não é contínua em a. Ou seja, quando existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta \in X$ de forma que

$$|x_\delta - a| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon_0.$$

▶ **EXEMPLO:** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



Mostre que f é descontínua em $a = 0$.

Solução: Tomemos $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$, desta forma temos que

$$\left(f(0) - \varepsilon_0, f(0) + \varepsilon_0\right) = \left(1 - \tfrac{1}{2}, 1 + \tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right).$$

Assim, para todo $\delta > 0$, existe $x_\delta \in (-\delta, 0) \subset (-\delta, \delta)$. Pela definição de f, como $x_\delta < 0$, temos que $f(x_\delta) = -1$.

Logo, segue que

$$|f(x_\delta) - f(0)| = |-1 - 1| = |-2| = 2 > \tfrac{1}{2} = \varepsilon_0$$

Ou seja, mostramos que existe um $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ tal que $\forall \delta > 0$ existe $x_\delta \in X$ onde $x_\delta \in (-\delta, 0)$ tal que

$$|x_\delta - 0| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x_\delta) - f(0)| > \varepsilon_0.$$

Isso mostra que f é descontínua em 0. ◀

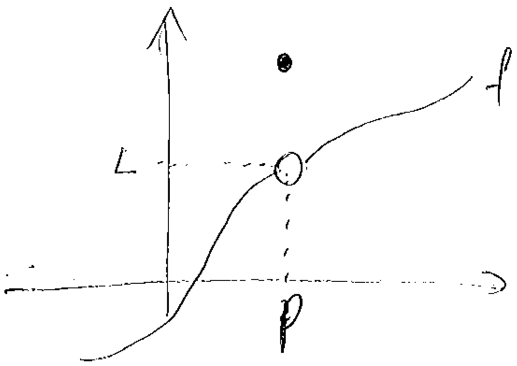
5

~~EXEMPLO: A função af~~

DEFINIÇÃO DE LIMITE

IDEIA INTUITIVA

Suponha uma $f(x)$ dada da seguinte forma



Dizemos que L é o limite de f quando x tende a p, quando os valores de $f(x)$ tendem a L quando x tende a p.

DEFINIÇÃO FORMAL

DEFINIÇÃO [LIMITE] Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou das extremidades. Dizemos que f tem limite L, quando x tende a p, se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in D_f$, temos

$$0 < |x-p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x\to p} f(x)$.

Assim,

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in D_f \\ 0 < |x-p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{cases}$$

OBS: Comparando as definições

$$\boxed{f \text{ contínua em } p \iff \lim_{x\to p} f(x) = f(p)}$$

OBS: O limite da f em p ñ depende do valor que f assume em p, mas sim dos valores que f assume nos pontos próximos de p.

EXEMPLO: Prove que $\lim_{x \to 3} (4x-5) = 7$. (6)

Solução:

STEP 1: Uma análise preliminar do problema (conjecturando um valor p/ δ).

Seja $\varepsilon > 0$, queremos encontrar um número δ tal que

$$0 < |x-3| < \delta \implies |(4x-5) - 7| < \varepsilon.$$

Porém, note que

$$|(4x-5) - 7| = |4x-12| = |4(x-3)| = 4|x-3|$$

Portanto, queremos um δ tal que

$$0 < |x-3| < \delta \implies 4|x-3| < \varepsilon \implies |x-3| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

O que nos sugere que deveríamos escolher $\delta = \varepsilon/4$.

STEP 2: DEMONSTRAÇÃO (Mostrando que este δ funciona)

Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \varepsilon/4$, então p/

$$|x-3| < \varepsilon/4 \implies |(4x-5) - 7| = |4x-12| = 4|x-3| < 4 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

ou seja,

$$|x-3| < \frac{\varepsilon}{4} \implies |(4x-5) - 7| < \varepsilon.$$

Portanto, pela definição de limite, temos

$$\lim_{x \to 3} (4x-5) = 7.$$

Propriedades do Limite

Seja c uma constante e $\lim_{x \to p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to p} g(x) = L_2$

1) PROPRIEDADE DA SOMA:

$$\lim_{x \to p} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) + \lim_{x \to p} g(x) = L_1 + L_2.$$

(O limite de uma soma é a soma dos limites)

2) PROPRIEDADE DA DIFERENÇA:

$$\lim_{x \to p} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) - \lim_{x \to p} g(x) = L_1 - L_2.$$

7

3) PROPRIEDADE DA MULTIPLICAÇÃO POR UMA CONSTANTE.

$$\lim_{x\to p}[c f(x)] = c \lim_{x\to p} f(x) = c L_1.$$

(O limite de uma constante multiplicando uma função é a constante multiplicado o limite desta função)

4) PROPRIEDADE DO PRODUTO.

$$\lim_{x\to p}[f(x)\, g(x)] = \lim_{x\to p} f(x) \lim_{x\to p} g(x) = L_1 \cdot L_2.$$

(O limite do produto é o produto dos limites).

5) PROPRIEDADE DA DIVISÃO

$$\lim_{x\to p}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to p} f(x) \Big/ \lim_{x\to p} g(x) = \frac{L_1}{L_2} \quad \text{se } \lim_{x\to p} g(x) = L_2 \neq 0.$$

(O limite da divisão é a divisão dos limites).

EXEMPLO: Calcule $\lim_{x\to 2} (5x^3-8)$

Solução

$$\lim_{x\to 2}(5x^3-8) = \lim_{x\to 2} 5x^3 + \lim_{x\to 2}(-8) = 5\cdot \lim_{x\to 2} x^3 + \lim_{x\to 2}(-8)$$

$$= 5\cdot 2^3 - 8 = 32.$$

EXEMPLO: Calcule $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-2x+1}{x^3+3x^2+1}$

Solução:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x+1}{x^3+3x^2+1} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^4-2x+1)}{\lim_{x\to 1}(x^3+3x^2+1)} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^4) - 2\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1} x^3 + 3\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1}(1)}.$$

$$= \frac{1-2+1}{1+3+1} = \frac{0}{5} = 0$$

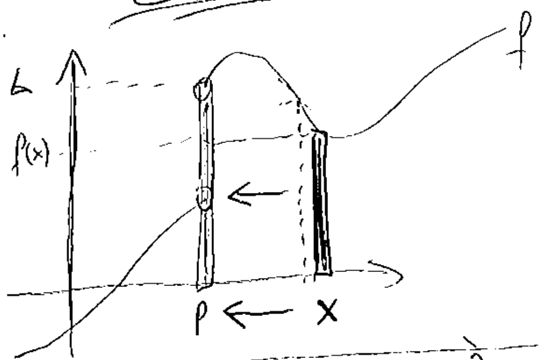
Aula 5

1

Objetivos:

- Introduzir o conceito de limites laterais.
- Estudar o limite de funções compostas
- Enunciar o teorema do Confronto.
- Extender o conceito de limite para o infinito.

Limites Laterais



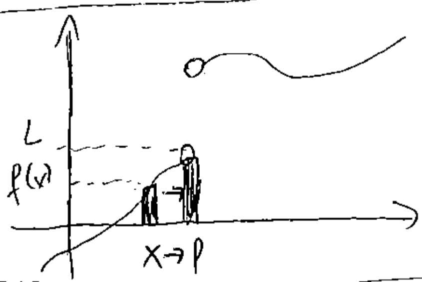
Quando x tende a p, pela direita, $f(x)$ tende a L:

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L.$$

DEFINIÇÃO [Limite lateral à direita] Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existe b tal que $(p, b) \subset D_f$. Então, definimos

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ p < x < p + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \end{cases}$$

O número L, quando existe, denomina-se limite lateral à direita de f, em p.



Quando x tende a p, pela esquerda, $f(x)$ tende a L:

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L.$$

DEFINIÇÃO [Limite lateral à esquerda] Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que exista um número real a tal que $(a, p) \subset D_f$. Então, definimos

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ p - \delta < x < p \implies |f(x) - L| < \varepsilon. \end{cases}$$

EXEMPLO: Calcule $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, sendo $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x<1 \\ 2x & \text{se } x>1 \end{cases}$ ②

Solução:

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x = 2 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 = 1 \end{cases}$$

TEOREMA:

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \iff \lim_{x\to p^+} f(x) = L = \lim_{x\to p^-} f(x)$$

EXEMPLO: Mostre que $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

Solução:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0} -1 = -1$$

Assim, como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$$

segue que $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe

Limite de Função Composta

TEOREMA: Sejam $u = f(x)$ e g duas funções tais que $Im f \subset D_g$. Se $\lim_{x\to p} f(x) = a$ e g contínua em a, então,

$$\lim_{x\to p} g(f(x)) = \lim_{u\to a} g(u).$$

EXEMPLO: Calcule $\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}$

Solução: Chamemos $u = \frac{x^2-1}{x-1}$, p/ $x > -1$ e $x \neq 1$. Observe que

$$\lim_{x\to 1} u = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2,$$

ou seja, $x \to 1$ então $u \to 2$. Portanto, como $g(u) = \sqrt{u}$ é contínua em 2, temos

$$\lim \sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}} = \lim \sqrt{u} = \sqrt{2}.$$

EXEMPLO: Calcule $\lim_{x\to 1} \dfrac{(3-x^3)^4-16}{x^3-1}$ (3)

Solução: Façamos $u=3-x^3$ com $x\neq 1$. Desta forma, note que

$$\lim_{x\to 1} u = \lim_{x\to 1}(3-x^3)=2,$$

como $g(u)=\frac{u^4-16}{2-u}$ é contínua em 2, temos que ~~g(u) é contínua~~ em 2

Ou seja p/ $x\to 1$, segue $u\to 2$. Então,

$$\lim_{x\to 1}\frac{(3-x^3)^4-16}{x^3-1} = \lim_{u\to 2}\frac{u^4-16}{2-u} = \lim_{u\to 2}\frac{(u-2)(u+2)(u^2+4)}{2-u}$$

$$= -\lim_{u\to 2}(u+2)(u^2+4) = -\left[\lim_{u\to 2} u+2\right]\left[\lim_{u\to 2} u^2+4\right]$$

$$= -32.$$

EXEMPLO: Calcule $\lim_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1}$.

Solução: Façamos $u=\sqrt[3]{x+2} \Longrightarrow x=u^3-2$, p/ $x\neq -1$. Desta forma, note que

$$\lim_{x\to -1} u = \lim_{x\to -1}\sqrt[3]{x+2} = 1,$$

ou seja, p/ $x\to -1$ temos $u\to 1$. Então, como $\frac{u-1}{u^3-1}$ é contínua em 1, tem.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x+2}}{x+1} = \lim_{u\to 1}\frac{u-1}{u^3-1} = \lim_{u\to 1}\frac{u-1}{(u-1)(u^2+u+1)} =$$

$$= \lim_{u\to 1}\frac{1}{(u^2+u+1)} = \frac{1}{\lim_{u\to 1}(u^2+u+1)} = \frac{1}{3}.$$

TEOREMA DO CONFRONTO

TEOREMA [DO CONFRONTO] Sejam f, g, h três funções e

$$f(x)\leq g(x)\leq h(x) \quad (\exists r>0 \mid |x-p|<r).$$

quando x está próximo de p. Nestas condições, se

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x\to p} g(x) = L$$

EXEMPLO Calcule $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ (4)

Solução: Neste caso ñ podemos aplicar o limite diretamente pois $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, não existe. Então iremos recorrer ao teorema do confronto, lembremos das propriedades da função seno, mais especificamente que ela é limitada, ou seja,

$$\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq 1 \implies -1 < \operatorname{sen}\frac{1}{x} < 1 \implies -x^2 < x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} < x^2$$

Agora, como

$$\lim_{x \to 0} (-x^2) = 0 = \lim_{x \to 0} (x^2)$$

temos pelo Teorema do Confronto que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

EXEMPLO: Calcule o $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Solução: Das propriedades de funções trigonométricas, temos que existe um $r > 0$ tal que

$$0 < \operatorname{sen} x < x < \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad p/ \ 0 < x < r.$$

Dividindo ambos os lados por $\operatorname{sen} x$, temos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \implies \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Por outro lado,

$$-r < x < 0 \implies 0 < -x < r \implies \cos(-x) < \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} < 1.$$

$$\implies \cos x < \frac{-\operatorname{sen}(x)}{-x} < 1.$$

Assim, $\forall x$ com $0 < |x| < r$, temos

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Como $\lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \lim_{x \to 0} 1$. Pelo Teorema do Confronto, segue que

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

Observe que p/ $-\pi/2 < x < \pi/2$ temos do círculo trigonométrico

$\overline{AC} < arc(AB) < \overline{BD}$

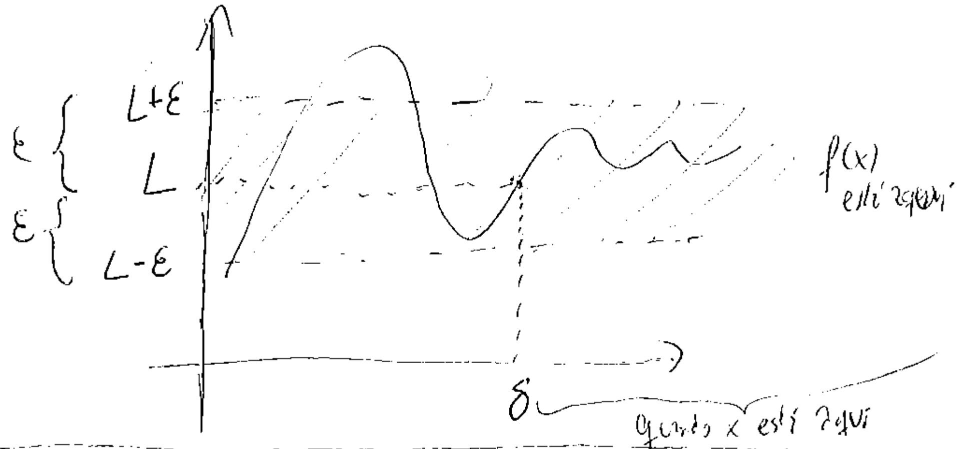
$\operatorname{sen} x < x < \tan x$

para x em radiano

Extensões do Conceito de Limite

⑤

Limites no Infinito



DEFINIÇÃO [LIMITE NO INFINITO] Seja f uma função e $\{a \in \mathbb{R} \mid (a,\infty) \in D_f\}$ e $\{b \in \mathbb{R} \mid (-\infty, b) \in D_f\}$. Então definimos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{cases}$$

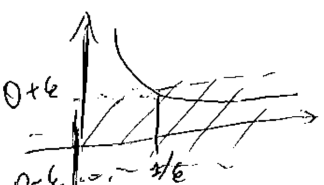
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } -\delta < b, \text{ tal que} \\ x < -\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \end{cases}$$

EXEMPLO: Calcule $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ e justifique.

Solução:

Quanto maior o valor de x, mais próximo de zero estará $\frac{1}{x}$.

Logo $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.



Justificativa.

Dado $\varepsilon > 0$ e tomando-se $\delta = 1/\varepsilon$

$$x > \delta \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$$

Portanto, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

EXEMPLO: Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1}$

Solução

$$\lim \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^5\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right)}{\dots} = \frac{1}{2}$$

Limites Infinitos

(6)

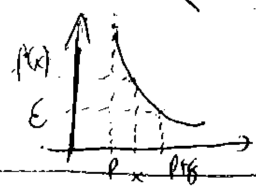
DEFINIÇÃO: Seja f uma função e suponhamos que exista a tal que $(a,+\infty) \in D_f$. Definimos.

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon \end{cases}$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \\ x > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon \end{cases}$

DEFINIÇÃO: Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que exista b tal que $(p,b) \subset D_f$. Definimos.

$\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = +\infty \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } p+\delta < b, \text{ tal que} \\ p < x < p+\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon \end{cases}$



Propriedades: Seja L_1 e L_2 dois limites. Então

$\begin{cases} L_1 = \infty \\ L_2 = \infty \end{cases} \Rightarrow L_1 \cdot L_2 = \infty$ e $L_1 + L_2 = \infty$

$\begin{cases} L_1 = -\infty \\ L_2 = -\infty \end{cases} \Rightarrow L_1 \cdot L_2 = +\infty$ e $L_1 + L_2 = -\infty$

$\begin{cases} L_1 = +\infty \\ L_2 = -\infty \end{cases} \Rightarrow L_1 \cdot L_2 = -\infty$

$\begin{cases} L_1 = a \\ L_2 = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow L_1 \cdot L_2 = \text{sinal}(a) \cdot \pm\infty$ $\quad L_1 + L_2 = \pm\infty$

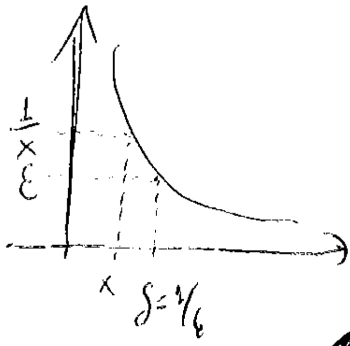
$\begin{cases} L_1 = \infty \\ L_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{L_1} = 0 \\ 1/L_2 = \pm\infty \text{ ou ñ existe} \end{cases}$

OBS: Nas operações com limites, muitas vezes aparecem os símbolos $\infty \cdot (-\infty)$; $\infty \cdot 0$; $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, chamados símbolos de indeterminação. Ou seja, não podemos afirmar sobre eles, EXEMPLO: Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ e justifique (7)

Solução:

Dado $\varepsilon>0$, tome $\delta=1/\varepsilon$, desta forma

$$0<x<\delta \Rightarrow 0<x<\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{x}<\varepsilon.$$



Logo $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{X} = +\infty$

EXEMPLO: Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+3x-1}{2x^2+x+1}$.

Solução: $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-1}{2x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left[1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right]}{x^2\left[2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]}$$

$$=\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = +\infty\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\infty$$

~~EXEMPLO: Calcule~~

①

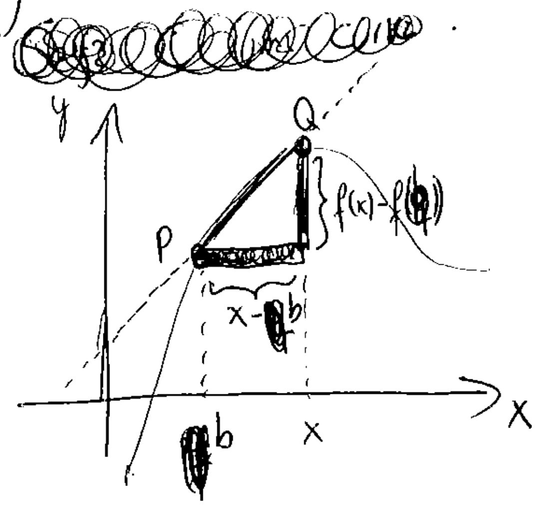
Aula 6

Objetivos:

- Apresentar o conceito de derivada
- Estudar as derivadas de funções exponenciais e Logarítmicas e Polinomiais. Parte 1 das Regras de Derivação

Derivada: Conceito

Tangente:



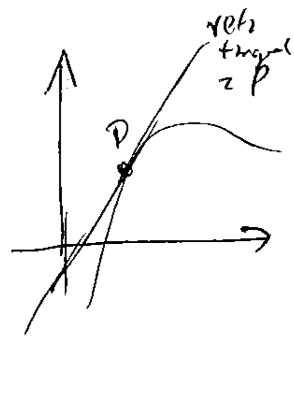
Inclinação de PQ é

$$m_{PQ} = \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

Para obtermos a reta tangente no ponto P, devemos aproximar Q de P o máximo possível. Ao fazermos isso, estamos fazendo que x tende a b,

Assim temos que a inclinação da reta tangente é

$$m = \lim_{x \to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-a}$$



Portanto, podemos fazer a seguinte definição

DEFINIÇÃO [Reta Tangente] A reta tangente à curva $y=f(x)$ em um ponto $P(b,f(b))$ é a reta dada pela equação

$$y-f(b)=m(x-b)$$

que passa pelo ponto B e possui inclinação

$$m=\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

desde que esse limite exista.

▶ EXEMPLO: Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y=x^2$ no ponto $P(1,1)$.

Solução. Temos aqui $b=1$ e $f(x)=x^2$, logo a inclinação é

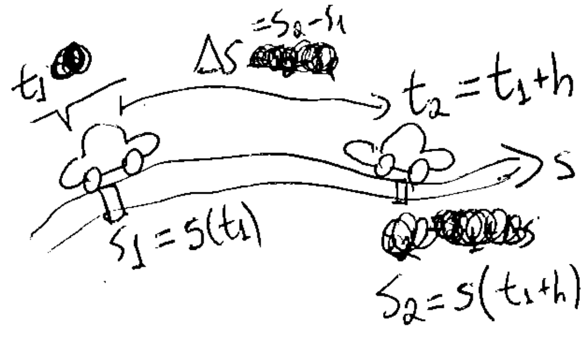
$$m=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

Logo, substituindo na equação da reta tangente em (1,1), obtemos

$$y-1=2(x-1)\Longrightarrow\boxed{y=2x-1}$$

Velocidade



Sabemos que a velocidade média é dada por

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{s(t_1+h)-s(t_1)}{h}$$

Gostaríamos de saber qual é a velocidade no instante t_1, então vamos calcular a velocidade média fazendo t_2 se aproximar do cada vez mais de t_1, ou seja

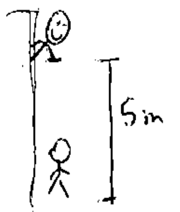
3

Então definimos...

DEFINIÇÃO [VELOCIDADE INSTÂNTANEA] Definimos a velocidade instantânea como o limite da velocidade média, ou seja

$$v(t_1) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_1+h) - s(t_1)}{h}$$

EXEMPLO: O professor está dando uma aula no segundo andar, que dista 5 metros do chão, quando observa pela janela seu aluno. Querendo pregar uma peça, ele pega um giz e pretende soltar da janela p/ atingir o aluno. Através dos seus conhecimentos de física ele sabe que a equação do movimento do giz é $s = 5t^2$. Com qual velocidade o giz chegará na cabeça do aluno?



Solução: Primeiramente, precisamos saber quanto tempo o giz atingirá o aluno.

$$s(t_f) = 5 \Longrightarrow 5t_f^2 = 5 \Longrightarrow t_f = 1.$$

Assim, temos que

$$v(t_f) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_f+h) - s(t_1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5(t_f+h)^2 - 5t_f^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5(t_f^2 + 2ht_f + h^2 - t_f^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5(2ht_f + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 5(2t_f + h) = 10t_f.$$

Portanto, a velocidade que o giz atinge a cabeça do aluno é

$$v(t_f) = 10t_f = 10\cdot 1 = 10 \text{ m/s}.$$

OBS: Note que chamando $h = x - p$, temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Logo, podemos afirmar que a velocidade no instante $t = p$ é igual à inclinação da reta tangente no ponto $(p, f(p))$.

(4)

Definição Formal Derivada

DEFINIÇÃO [Derivada de uma Função] Seja f uma função e p um ponto de seu domínio. Então o limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(h)}{h}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$. Assim,

$$f'(p) = \lim \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(h)}{h}$$

Taxa de Variação: Uma interpretação da Derivada.

Temos que o quociente das diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é denominado de taxa média de variação de y em relação a x.
Por analogia a velocidade, podemos pensar na taxa instantânea quando $x_2 \to x_1$, ou $\Delta x = x_2 - x_1 \to 0$.

DEFINIÇÃO [TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA] Seja y uma função de x. Então chamamos a taxa (instantânea) de variação de y em relação a x em $x = x_1$, por

$$\text{taxa de variação} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Assim, podemos interpretar a derivada como sendo uma taxa de variação.

Outras notações

Seja $y = f(x)$ uma função. Podemos indicar a derivada dessa função das seguintes formas

$$f'(x) \equiv y' \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f(x)$$

OBS: O símbolo $\frac{dy}{dx}$ não deve ser encarado como um quociente,

EXEMPLO: Seja $f(x) = x^2 - 8x + 9$. Calcule $f'(4)$. (5)

Solução: $f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(4+h)^2 - 8(4+h) + 9] - [4^2 - 8\cdot 4 + 9]}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{4^2} + 2\cdot 4\cdot h + h^2 \cancel{- 8\cdot 4} - 8\cdot h \cancel{+9} \cancel{- 4^2} \cancel{+ 8\cdot 4} \cancel{- 9}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot 4\cdot h + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h\to 0} (2\cdot 4 + h - 8) = 2\cdot 4 - 8 = 0$$

Portanto $f'(4) = 0$

EXEMPLO: Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \frac{1-x}{2+x}$.

Solução: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \frac{1-x}{2+x}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{2} \cancel{-x} - 2h \cancel{-x^2} \cancel{-xh}) - (\cancel{2} \cancel{-x} + h \cancel{-x^2} \cancel{-xh})}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)} = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} = \frac{-3}{(2+x)^2}$$

Portanto $f'(x) = \frac{-3}{(2+x)^2}$

Regras de Derivação

PARTE 1.

REGRAS DE DERIVAÇÃO: PARTE 1: Seja f e g deriváveis, k uma constante e $n \neq 0$ um natural. São válidas as fórmulas de derivação:

a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

b) $(kf)'(x) = kf'(x)$

c) $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

d) $f(x) = x^{-n} \Longrightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}$, $x \neq 0$

e) $f(x) = x^{1/n} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{n} x^{1/n - 1}$

f) $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$

h) $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$

EXEMPLO: Calcule a derivada de $f(x) = 7x^8 + 2x^6 - x^4 + 2$. ⑥

Solução:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(7x^8 + 2x^6 - x^4 + 2\right) = \frac{d}{dx}(7x^8) + \frac{d}{dx}(2x^6) - \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(2)$$

$$= 7\frac{d}{dx}(x^8) + 2\frac{d}{dx}(x^6) - \frac{d}{dx}(x^4) + 2\frac{d}{dx}(x^0)$$

$$= 7\cdot\left(8x^{8-1}\right) + 2\left(6\cdot x^{6-1}\right) - \left(4x^{4-1}\right) + 2\cdot\cancel{\left(0\cdot x^{0-1}\right)}^{=0}$$

$$= 56\cdot x^7 + 12x^5 - 4x^3$$

Logo, $f'(x) = 56x^7 + 12x^5 - 4x^3$.

EXEMPLO: Calcule a derivada de $f(x) = x - \frac{1}{x} + 4\sqrt{x}$.

Solução:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{1}{x} + 4\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + 4\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(x^{-1}) + 4\frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \left(1\cdot x^{1-1}\right) - \left(-1\cdot x^{-1-1}\right) + 4\left(\frac{1}{2}x^{1/2-1}\right)$$

$$= 1 + x^{-2} + 2x^{-1/2} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Portanto, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

EXEMPLO: Calcule a derivada de $f(x) = e\cdot x - e^x + \ln x$ no ponto $x = 1$.

Solução:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(e\cdot x - e^x + \ln x\right) = \frac{d}{dx}(e\cdot x) - \frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$= e\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(\ln x) = e - e^x + \frac{1}{x}$$

Avaliando no ponto $x=1$, temos

$$f'(1) = e - e + \frac{1}{1} = 1.$$

1

AULA 7

Objetivos:

- Realizar um estudos das derivadas das Funções trigonométricas
- Estudar as regras de Derivação do Produto e Quociente
  Regras de Diferenciação - PARTE 2.
- Apresentar a relação entre diferenciabilidade e continuidade.

Derivadas de Funções Trigonométrica

Derivadas de Funções trigonométricas: São válidas as fórmulas de derivação

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotan} x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotan} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$$

Antes de partirmos p/ os exemplos vamos provar, pela definição de limite que $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$. Pois bem seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Logo.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} x\cos h - \operatorname{sen} x}{h} + \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)\right]$$

$$= \lim \underbrace{\operatorname{sen} x}_{\to \operatorname{sen} x} \cdot \lim \frac{\cos h - 1}{h} + \lim \underbrace{\cos x}_{\to \cos x} \cdot \lim \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\to 1}$$

Vamos então calcular $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{\cos h}$. Pois bem 2

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h - 1}{h}\cdot\frac{\cos h + 1}{\cos h + 1}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h + 1}}_{\to \left(\frac{0}{2}\right) = 0} = 0$$

Portanto

$$f'(x) = \operatorname{sen} x \cdot 0 + (\cos x)\cdot 1 = \cos x.$$

~~EXEMPLO Calcule~~

Regra de Derivação - Parte 2

Derivada do Produto e Quociente

TEOREMA: Sejam f e g funções deriváveis. Então

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad p/\ g(x) \neq 0.$$

▶ EXEMPLO: Seja $f(x) = (3x^2+1)e^x$. Calcule $f'(x)$.

Solução: Pela regra do produto

$$f'(x) = (3x^2+1)'\,e^x + (3x^2+1)(e^x)'.$$

Como

$$\begin{cases} (3x^2+1)' = 2\cdot 3x^{2-1} + 0 = 6x \\ (e^x)' = e^x \end{cases}$$

Obtemos,

$$f'(x) = 6xe^x + (3x^2+1)e^x = (3x^2+6x+1)e^x$$

3

▶ EXEMPLO: Seja $y = \dfrac{x^2+x-2}{x^3+6}$. Calcule $y'(x)$.

$$y'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(x^2+x-2)\right](x^3+6) - (x^2+x-2)\left[\frac{d}{dx}(x^3+6)\right]}{(x^3+6)^2}$$

$$= \frac{(x^3+6)(2x+1) - (x^2+x-2)(3x^2)}{(x^3+6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4+x^3+12x+6) - (3x^4+3x^3-6x^2)}{(x^3+6)}$$

$$= \frac{-x^4-2x^3+6x^2+12x+6}{(x^3+6)^2}$$

▶ EXEMPLO: Seja $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x+1}$. Calcule $h'(x)$.

Solução: Pela regra do quociente

$$h'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)'(x+1) - \operatorname{sen} x\,(x+1)'}{(x+2)^2} = \frac{(\cos x)(x+1) - \operatorname{sen} x}{(x+1)^2}$$

▶ EXEMPLO: Calcule a derivada de $f(x) = \dfrac{\sec x}{1+\tan x}$.

Solução: $$f'(x) = \frac{(1+\tan x)\left[\frac{d}{dx}(\sec x)\right] - \sec\left[\frac{d}{dx}(1+\tan x)\right]}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1+\tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x + \overbrace{\tan^2 x - \sec^2 x}^{-1})}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x - 1)}{\;}$$

EXEMPLO: Calcule a derivada de $f(x) = \dfrac{x+1}{x \ln x}$. 4

<u>Solução:</u> $$f'(x) = \frac{(x+1)' \cdot (x \ln x) - (x+1)\cdot(x \cdot \ln x)'}{(x \ln x)^2}$$

$$= \frac{(x+1)' \cdot (x \ln x) - (x+1)(x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)')}{x^2 \ln^2 x}$$

$$= \frac{(1)\cdot(x \ln x) - (x+1)\left[(1)\cdot \ln x + x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)\right]}{x^2 \ln^2 x}$$

$$= \frac{x \cdot \ln x - (x+1)\cdot(\ln x + 1)}{x^2 \ln^2 x} = \frac{\cancel{x \ln x} - \cancel{x \ln x} - x - \ln x - 1}{x^2 \ln^2 x}$$

$$= \frac{-(x + \ln x + 1)}{x^2 \ln^2 x}.$$

EXEMPLO: Calcule a derivada de $f(x) = x^2(\cos x)(1 + \ln x)$.

<u>Solução:</u> Chamemos $g(x) = x^2 \cdot \cos x$. Então

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(g(x)\cdot(1+\ln x)\right) = g'(x)\cdot(1+\ln x) + g(x)\cdot(1+\ln x)'$$

$$= \left[x^2 \cos x\right]' \cdot (1+\ln x) + \left[x^2 \cdot \cos x\right]\cdot(1+\ln x)'$$

$$= \left[(x^2)' \cdot \cos x + x^2 \cdot (\cos x)'\right](1+\ln x) + x^2 \cos x\,(1+\ln x)'$$

$$= (x^2)' \cdot \cos x\,(1+\ln x) + x^2 \cdot (\cos x)'(1+\ln x) + x^2 \cos x\,(1+\ln x)'$$

$$= (2x)\cdot \cos x \cdot (1+\ln x) + x^2 \cdot (-\operatorname{sen} x)\cdot(1+\ln x) + x^2 \cos x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 2x \cos x \cdot (1+\ln x) - x^2 \operatorname{sen} x\,(1+\ln x) + x \cdot \cos x$$

$$= x \cdot \left[(1+\ln x)(2\cos x - x \operatorname{sen} x) + \cos x\right].$$

Derivabilidade e Continuidade (5)

Considere a função $f(x) = |x|$. Quando pensamos em calcular a derivada em $p=0$, devemos estudar o limite

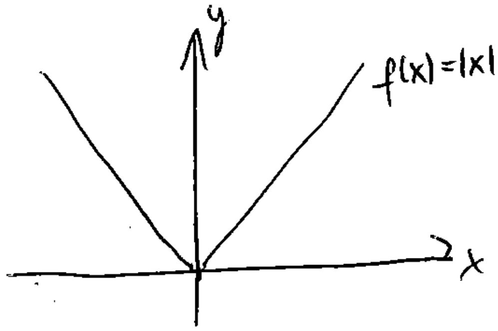
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{h\to 0} \frac{|x|}{x} =$$

Todavia, como $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

De tal forma que implica que o $\lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ não existe, ou seja f não é derivável em 0.

Entretanto, essa função é contínua em 0, o que nos mostra que uma função pode ser contínua em um ponto sem ser derivável no mesmo.



$f(x)=|x|$ é contínua em 0, mas não é derivável em 0..

Deste modo:

$$\text{continuidade} \not\Longrightarrow \text{derivabilidade}$$
$$\text{derivabilidade} \overset{?}{\underset{?}{\Longrightarrow}} \text{continuidade}$$

> **TEOREMA:** Se f for derivável em p, então f será contínua em p

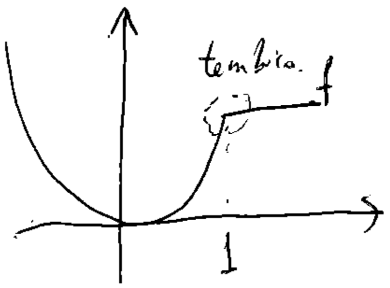
Todavia, sua forma contrapositiva é mais forte

> **TEOREMA:** Se f não for contínua em p, então f não é derivável em p

EXEMPLO: Seja $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\leq 1\\ 1 & \text{se } x>1\end{cases}$ (6)

a) f é contínua em 1?

b) f é diferenciável em 1?



Solução: a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$

Logo, como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ então f é contínua em 1.

b) Como f é contínua em 1, f poderá ser derivável ou não em 1.

Temos $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x<1\\ 0, & \text{se } x>1\end{cases}$

Assim $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) = 2$.

Logo, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ não existe, ou seja, f não é derivável em 1.

EXEMPLO Seja $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\leq 1\\ 2x-1 & \text{se } x>1\end{cases}$. Verifique se f é derivável e contínua em 1.

Solução: a) $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x<1\\ 2 & \text{se } x>1\end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$

Logo, f é derivável em 1 e $f'(1)=2$

b) Como f é derivável em 1, segue que f é contínua em 1.

EXEMPLO: A função $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\leq 1\\ 2 & \text{se } x>1\end{cases}$ é derivável em $p=1$?

Solução: Temos que f ñ é contínua em 1, pois $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$.

Como f não é contínua em 1, segue que f não é derivável em 1

(1)

Aula 8

Objetivos:

- Estudar a regra da cadeia, que nos permite derivar funções compostas
- Aprender a derivar funções do tipo $f(x)^{g(x)}$

— // — // — // —

Regra da Cadeia

Considere que queremos derivar a função

$$F(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

Com as regras que aprendemos até aqui não nos permite derivar a função $F(x)$.

Note que F é uma função composta ~~[illegible]~~

$$\begin{cases} g(x) = x^2+1 \\ F = f(g) = \sqrt{g} \end{cases} \Longrightarrow F(x) = f(g(x))$$

ou

$$F = f \circ g.$$

Assim, sabemos derivar $f=\sqrt{g}$ e $g = x^2+1$ separadamente. Portanto seria útil existir uma regra que nos falasse como achar a derivada de $F = f\circ g$ em termos de f e g.

> Regra da Cadeia: Seja g um função derivável em x e f um função derivável em $g(x)$. Então a função composta $F = f\circ g$ definida por $F(x) = f(g(x))$ é derivável em x e sua derivada é dada por
>
> $$F'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x).$$
>
> Ou ~~[illegible]~~
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \quad \text{onde } y=f(u) \text{ e } u=g(x)$$

Podemos pensar na regra da cadeia como: ②

"Deriva-se a função f de fora e ~~[illegible]~~ multiplica-se pela derivada do dentro"

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{função}\\ \text{de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{avaliada na}\\ \text{função de}\\ \text{dentro}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da}\\ \text{função de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{avaliada na}\\ \text{função de}\\ \text{dentro}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de dentro}}}$$

Vamos retornar ao exemplo do começo da aula.

EXEMPLO: Encontre a derivada de $F(x) = \sqrt{x^2+1}$.

<u>Solução 1</u>: Vimos que $f(u) = \sqrt{u}$ e $g(x) = x^2+1$.

Agora note que.

$$f'(u) = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \text{e} \quad g'(x) = 2x.$$

Temos então

$$F'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

<u>Solução 2</u>: Chamamos $u = x^2+1$, logo $y = \sqrt{u}$. Então

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

~~[illegible]~~ Algumas Regras gerais e Exemplos

Seja ~~[illegible]~~ $n \in \mathbb{R}$ e $g(x)$ uma função derivável

a) $[[g(x)]^n]' = n[g(x)]^{n-1}$

b) $[\ln g(x)]' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

c) $[e^{g(x)}]' = e^{g(x)}\cdot g'(x)$

d) $[\cos g(x)]' = -g'(x)\cdot \operatorname{sen} g(x)$

e) $[\operatorname{sen} g(x)]' = g'(x)\cdot \cos g(x).$

3

Demonstração:

b) Faça $u=g(x)$, logo $y=e^u$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\underbrace{\frac{d}{du}[e^u]}_{e^u}\ \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\frac{d}{dx}g(x)=g'(x)}=e^u\cdot g'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x).$$

a) Faça $u=g(x)$ e $y=u^n$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\underbrace{\frac{d}{du}[u^n]}_{n\cdot u^{n-1}}\frac{du}{dx}=n\cdot u^{n-1}\frac{du}{dx}=n\cdot[g(x)]^{n-1}\frac{dg(x)}{dx}$$

c) Faça $u=g(x)$, logo $y=\ln u$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\underbrace{\frac{d}{du}[\ln u]}_{1/u}\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{g'(x)}{g(x)}.$$

d) Faça $u=g(x)$ e $y=\cos u$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\underbrace{\frac{d}{du}[\cos u]}_{-\operatorname{sen} u}\frac{du}{dx}=(-\operatorname{sen} u)\frac{du}{dx}=-g'(x)\cdot\operatorname{sen} g(x).$$

e) Faça $u=g(x)$ e $y=\operatorname{sen} u$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\underbrace{\frac{d}{du}[\operatorname{sen} u]}_{\cos u}\frac{du}{dx}=\cos u\,\frac{du}{dx}=g'(x)\cdot\cos g(x).$$

$\blacksquare$

EXEMPLO: Calcule a derivada de $f(x)=\cos(3x)$

Solução: $u=3x$ e $f=\cos(u)$

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}=\left[\frac{d}{du}\cos(u)\right]\left[\frac{d(3x)}{dx}\right]=\left[-\operatorname{sen}(u)\right]\left[3\right]=-3\operatorname{sen}(3x).$$

EXEMPLO: Seja $y=(x+2)^2 e^{3x}$. (4)
Calcule $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Pela regra do produto,

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{d}{dx}(x+2)^2\right]\cdot e^{3x} + (x+2)^2\cdot\frac{d}{dx}e^{3x}.$$

Chamando $\begin{cases} u=3x \\ v=x+2 \end{cases}$, temos pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{d(v^2)}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}\right]\cdot e^{3x} + (x+2)^2\cdot\left[\frac{d(e^u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}\right]$$

$$= 2v\cdot\frac{dv}{dx}\, e^{3x} + (x+2)^2\cdot e^u\,\frac{du}{dx}$$

$$= 2\cdot(x+2)\,\frac{d}{dx}(x+2)\cdot e^{3x} + (x+2)^2\cdot e^{3x}\cdot\frac{d}{dx}(3x)$$

$$= 2\cdot(x+2)\cdot(1)\cdot e^{3x} + (x+2)^2 e^{3x}\cdot(3)$$

$$= \left[3(x+2)^2 + 2(x+2)\right] e^{3x}$$

EXEMPLO: Calcule a derivada de $y=\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^4$.

Solução: Chamando $u=\frac{x+1}{x^2+1}$ temos que $y=u^4$. Assim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = \frac{d(u^4)}{du}\,\frac{du}{dx} = 4u^3\,\frac{du}{dx} = 4\cdot\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^3\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)'$$

Como

$$\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x+1)'\cdot(x^2+1)-(x+1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(1)\cdot(x^2+1)-(x+1)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)}.$$

Portanto, $\frac{dy}{dx} = 4\cdot\left(\frac{x+1}{\ldots}\right)^3\cdot\left(\frac{-x^2-2x+1}{\ldots}\right).$

EXEMPLO: Calcule a derivada do monstro (5)

$$f(x) = \text{sen}(\cos(\tan x))$$

Solução: Primeiramente faça $u = \cos(\tan x)$, assim $f = \text{sen}\, u$.

$$f'(x) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \cdot \frac{du}{dx} = \cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}\cos(\tan x)$$

Agora chamemos $\vartheta = \tan x$, assim $\cos(\tan x) = \cos \vartheta$.

$$f'(x) = \cos(\cos(\tan x))\frac{d(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dx} = \cos(\cos(\tan x))(-\text{sen}\,\vartheta)\frac{d\vartheta}{dx}$$

$$= -\cos(\cos(\tan x))\cdot\text{sen}(\tan x)\cdot\frac{d}{dx}(\tan x) = -\cos(\cos(\tan x))\,\text{sen}(\tan x)\sec^2 x.$$

Derivada de $f(x)^{g(x)}$

Considere a função

$$y = f(x)^{g(x)}, \quad p/\ f(x) > 0,\ \forall x \in D_f \cap D_g.$$

Apliquemos ln em ambos os lados,

$$\ln y = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x)\ln f(x).$$

Aplicando exponencial de ambos os lados tem.

$$\underbrace{e^{\ln y}}_{y} = e^{g(x)\ln f(x)} \Longrightarrow y = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Ou seja, $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

Então, pela regra da cadeia, temos.

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = \underbrace{e^{g(x)\ln f(x)}}_{f(x)^{g(x)}}\left[g(x)\cdot\ln f(x)\right]'$$

e portanto,

$$\boxed{\left[f(x)^{g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)}\cdot\left[g(x)\cdot\ln f(x)\right]'}$$

EXEMPLO: Calcule a derivada 6

a) $y = x^x$ b) $y = 3^x$.

Solução:

a) $x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$.

$(x^x)' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1)$.

b) $3^x = e^{\ln(3^x)} = e^{x \ln 3}$.

Pela regra da cadeia

$(3^x)' = e^{x \ln 3} \cdot (x \cdot \ln 3)'$

Como $\ln 3$ é uma constante

$(3^x)' = e^{x \ln 3} \cdot \ln 3 \cdot (x') = e^{x \ln 3} \cdot \ln 3 = 3^x \ln 3$.

EXEMPLO: Seja $a > 0$, $a \neq 1$. uma constante, Mostre que, para todo x

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Solução:

$y = a^x \Rightarrow \ln y = \ln(a^x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln y = x \cdot \ln a \Rightarrow e^{\ln y} = e^{x \cdot \ln a}$

$\Rightarrow y = e^{x \ln a}$

$y = a^x \Rightarrow y = e^{\ln(a^x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = e^{x \ln a}$.

Pela regra da cadeia.

$(a^x)' = \underbrace{e^{x \ln a}}_{a^x} \underbrace{(x \cdot \ln a)'}_{\ln a \cdot (x')} = a^x \cdot \ln a \cdot (x') = a^x \cdot \ln a$.

(1)

Aulas 9

Objetivos:

- Realizar a derivação de funcoes implicitas.
- Efetuar um estudo de derivadas de funcoes inversas.
- Aprender a calcular derivadas de ordem superior.

Derivação Implicita

Até o momento aprendemos a calcular derivadas em que a variavel independente é explicitamente dado em termos da variavel independente, por exemplo.

$$y=x^2+2, \quad y=x\cdot e^x.$$

Observe que aqui conseguimos isolar o y da equação. Entretanto, isso nem sempre ocorre e temos que existem funções que são definidas implicitamente por uma relação entre y e x, tais como

$$x^2+y^2=25; \quad x^3+y^3=6xy.$$

Geralmente, chamamos uma função implicita se na configuração que ela se encontra o y não está isolado, $y=f(x)$.
Num ponto de vista mais formal podemos definir:

DEFINIÇÃO [FUNÇÃO IMPLICITA] Considere uma equação nas variaveis x e y. Dizemos que uma função $y=f(x)$ é dada implicitamente por tal equação se, $\forall x \in D_f$, o ponto $(x, f(x))$ for solução da

OBS: Observe que uma função explícita $y=f(x)$ ~~pos~~ sempre possui ② um versão implícita dada por $y-f(x)=0$, Todavia o contrário não é verdade.

OBS: Podemos pensar nas funções implícitas e explícitas como

$$y=f(x) \longrightarrow \text{explícita}$$

$$\phi(y,x)=0 \longrightarrow \text{implícita}.$$

Para a nossa alegria, ~~[illegible]~~ a derivação de funções implícitas é simples.

METODO DERIVAÇÃO IMPLÍCITA
O método consiste ~~em~~ em derivar ambos os lados da equação em relação a x, e, então obter a derivada de y, isolando y' da equação resultante

▶EXEMPLO: a) Calcule a derivada de $x^2+y^2=25$.
b) Encontre uma equação da tangente ao círculo $x^2+y^2=25$ no ponto $(3,4)$.

Solução: Derivando ambos os lados da equação $x^2+y^2=25$ em relação a x

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(25) \Longrightarrow \frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=0.$$

Lembrando que y é uma função de x e usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dy}(y^2)\cdot\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}.$$

Logo,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

Agora, isolando dy/dx: $\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{}}$

3

b) No ponto (3,4), temos $x=3$ e $y=4$, logo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}.$$

Uma equação da reta tangente ao círculo em (3,4) é portanto

$$y-4 = \frac{-3}{4}(x-3) \Longrightarrow \begin{cases} 3x+4y=25 \\ \text{ou} \\ y=\dfrac{25-3x}{4} \end{cases}$$

OBS: Observe que calcular a derivada da função de forma implícita ou explícita não altera o resultado. Considere a função implícita do exemplo anterior $x^2+y^2=25$. Isolando y, obtemos $y=\pm\sqrt{25-x^2}$. Assim

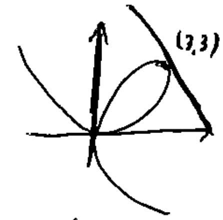
$$\frac{dy_+}{dx} = \frac{1}{2}(25-x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25-x^2) = \frac{1}{2}(25-x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{y}.$$

$$\frac{dy_-}{dx} = \frac{-1}{2}(25-x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25-x^2) = \frac{-1}{2}(25-x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{-\sqrt{25-x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

EXEMPLO:

(a) Encontre y' se $x^3+y^3=6xy$

(b) Encontre a reta tangente a $x^3+y^3=6xy$ no ponto (3,3).



Solução:

a) Derivando ambos os lados de $x^3+y^3=6xy$ em relação a x, obtemos,

$$\frac{d}{dx}(x^3+y^3) = \frac{d}{dx}(6xy) \Longrightarrow \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) = 6\frac{d}{dx}(xy) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overbrace{\cancel{\frac{d}{dx}(x^3)}}^{3x^2} + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6y\overbrace{\cancel{\frac{dx}{dx}}}^{1} + 6x\frac{dy}{dx} \Longrightarrow 3x^2+3y^2\frac{dy}{dx} = 6y+6x\frac{dy}{dx}$$

Isolando $\frac{dy}{dx}$, temos

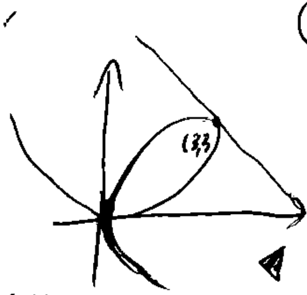
$$3y^2\frac{dy}{dx} - 6x\frac{dy}{dx} = 6y-3x^2 \Longrightarrow 3\frac{dy}{dx}(y^2-2x) = 3(2y-x^2) \Longrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x^2}{y^2-2x}}$$

b) No ponto (3,3), temos $x=y=3$, logo

$$y' = \frac{2\cdot 3-3^2}{3^2-2\cdot 3} = -1$$

4

Logo, a equação da tangente à $x^3+y^3=6xy$ em $(3,3)$ é



$$y-3=-1(x-3) \Longrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ y=-x+6 \end{cases}$$

EXEMPLO: Encontre y'. se $\operatorname{sen}(x+y)=y^2\cos x$.

Solução: Derivando implicitamente em relação a x, obtemos

$$(\operatorname{sen}(x+y))'=(y^2\cos x)' \Longrightarrow \cos(x+y)\cdot(x+y)'=\cos x\cdot(y^2)'+y^2(\cos x)'$$

$$\Longrightarrow \cos(x+y)\cdot(1+y')=\cos x\cdot(2yy')+y^2(-\operatorname{sen} x)$$

Unindo os termos que envolvem y', obtemos

$$\cos(x+y)+y^2\operatorname{sen} x=(2y\cdot\cos x)\,y'-\cos(x+y)\cdot y'$$

Logo,
$$y'=\frac{y^2\operatorname{sen} x+\cos(x+y)}{2y\cos x-\cos(x+y)}$$

Derivada de Funções Inversa

Seja f uma função e g a sua inversa, ou seja,

$$f(g(x))=x\ ;\quad \forall x\in D_g.$$

Segue que p/ todo $x\in D_g$

$$[f(g(x))]'=[x]' \Longrightarrow [f(g(x))]'=1.$$

Considerando f e g diferenciáveis, podemos aplicar a regra da cadeia, de forma que

$$f'(g(x))\cdot g'(x)=1 \Longrightarrow \boxed{g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))},\ \forall x\in D_g}$$

Passemos a formula anterior em notação de Leibniz. Seja $y=g(x)$. a inversa da função dada por $x=f(y)$. Então

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

(5)

EXEMPLO (DERIVADA DE ARCO-SENO) A função arco seno é contínua e é a inversa da função seno sendo definida por

$$y = \operatorname{sen}^{-1}(x) \text{ que significa } \operatorname{sen} y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Podemos calcular a inversa da seguinte forma (♡)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\operatorname{sen}(y))} \Longrightarrow \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)}.$$

Como $\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1$, temos

$$[\cos(\operatorname{sen}^{-1}(x))]^2 + [\underbrace{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}(x))}_{x}]^2 = 1 \Longrightarrow \cos^2(\operatorname{sen}^{-1}(x)) = 1 - x^2.$$

Como $y = \operatorname{sen}^{-1} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos que $\cos y > 0$. Assim,

$$\cos(\operatorname{sen}^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2} \qquad (☾)$$

Levando (☾) em (♡) obtemos.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(DERIVADA DE ARCO TANGENTE) Temos que

$$y = \tan^{-1} x \Longleftrightarrow x = \tan y.$$

Derivando essa última equação implicitamente em relação a x, temos

$$\frac{d}{dx}(\tan y) = \frac{d}{dx}(x) \Longrightarrow \sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

Como $\sec^2 = 1 + \tan^2 y$, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} \Longrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}}$$

Derivadas de funções trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cossec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotan}^{-1} x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

6

EXEMPLO: Determine a derivada

a) $y = \operatorname{sen}^{-1} x^2$

b) $f(x) = x \cdot \tan^{-1} 3x$

Solução: a) Seja $u = x^2$, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\operatorname{sen}^{-1} u)\,\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

b) $$f'(x) = (x)' \cdot \tan^{-1} 3x + x \cdot (\tan^{-1} 3x)' = \tan^{-1} 3x + x \cdot \left(\frac{1}{1+(3x)^2}\right) \cdot 3$$

$$= \tan^{-1} 3x + \frac{3x}{1+9x^2}.$$

Derivadas de ordem Superior

Até agora vimos que f' é denominada de derivada, entretanto podemos querer derivar mais de uma vez uma dada função. Assim chamamos f' de derivada de 1ª ordem, $f'' = (f')'$ a derivada de 2ª ordem e assim por diante.

EXEMPLO: Calcule f', f'' e f''' de $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x$.

Solução

$$f'(x) = [4 \cdot x^{4-1}] + 2 \cdot [3x^{3-1}] + 3 = 4x^3 + 6x^2 + 3$$

$$f''(x) = (4x^3 + 6x^2 + 3)' = 12x^2 + 12x = 12(x^2 + x).$$

$$f'''(x) = (12[x^2 + x])' = 12 \cdot (2x + 1).$$

EXEMPLO: Encontre y'' se $x^4 + y^4 = 16$.

Solução: Derivando Implicitamente e isolando y' temos

$$(x^4 + y^4)' = (16)' \Rightarrow 4x^3 + 4y^3 y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x^3}{y^3}.$$

Derivando mais uma vez obtemos,

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\left[\frac{y^3 (x^3)' - x^3 (y^3)'}{(y^3)^6}\right] = -\left[\frac{3y^3 x^2 - 3x^3 y^2 y'}{y^6}\right]$$

$$= -\left[\frac{3x^2 y^3 - 3x^3 y^2 \left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}\right] = \frac{-3(x^2 y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Como $x^4 + y^4 = 16$, obtemos.

$$y'' = -\frac{3x^2 \cdot (16)}{y^7} \Longrightarrow \boxed{y'' = -48\frac{x^2}{y^7}}$$

1

Aula 10

Objetivos:

- Apresentar a regra de L'Hospital que nos permite resolver limites que trazem indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.
- Introduzir o Teorema de Weierstrass, teorema do Valor intermediário e ~~caso~~ ~~particular~~ o teorema de Bolzano.
- Estudar o Teorema de Rolle e o Teorema do Valor médio.

Regra de L'Hospital

Vimos anteriormente que indeterminações quando estamos calculando os limites podem ocorrer. Considere por exemplo o limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Quando aplicamos o limite diretamente utilizando a propriedade do quociente dos limites obtemos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\lim_{x \to 1} x^2-1}{\lim_{x \to 1} x-1} = \frac{0}{0}.$$

Assim, nada podemos afirmar sobre o limite pois ele ainda pode existir. Neste mesmo caso após algumas manipulações temos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2.$$

~~Logo seria interessante termos algo~~

Todavia manipulações como essa nem sempre são possíveis de forma que seria interessante termos um método p/ calcular indeterminações.

Quociente indeterminados (2)

A regra de L'Hospital aplicam-se a calculos de limites que apresentam indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Regra de L'Hospital: Sejam f e g deriváveis, com $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém p (exceto possivelmente em p). Nestas condições, se

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} g(x) = 0$$

Ou se,

$$\lim_{x \to p} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to p} g(x) = \pm\infty.$$

~~ou se, se tivermos indeterminações~~.

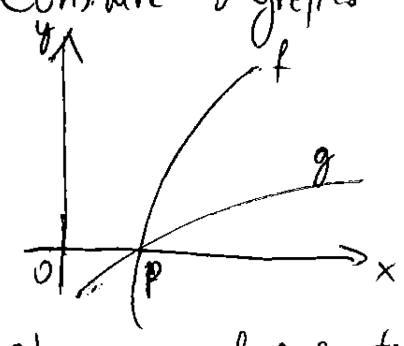
Então

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

se o limite da direita existir.

- Interpretação Geométrica da validade da Regra de L'Hospital

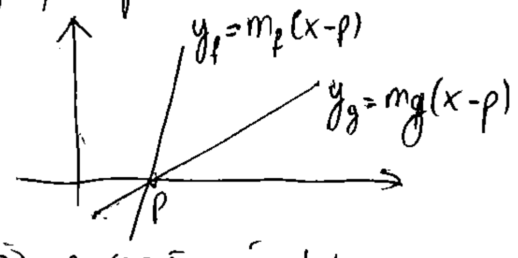
Considere o gráfico



Observe que f e g tendem a zero quando $x \to p$.

Perto do ponto $(p, 0)$, as funções são praticamente lineares.

Assim, perto de $(p, 0)$ podemos aproximar o gráfico para



Então a razão é dada por

$$\frac{f}{g} \underset{\substack{\text{perto} \\ \text{de } p}}{=} \frac{y_f}{y_g} = \frac{m_f(x-p)}{m_g(x-p)} = \frac{m_f}{m_g} = \frac{f'}{g'}$$

Sugerimos que

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g(x)}.$$

OBS: A regra de L'Hospital continua válida se substituirmos "$x \to p$" por

▶ Encontre $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Solução: Vimos que esse limite é igual a 2. Mostraremos isso através de L'Hospital. Uma vez que

$$\lim_{x \to 1} x^2-1 = 0 \qquad e \qquad \lim_{x \to 1} (x-1) = 0.$$

podemos aplicar a Regra de l'Hôspital e obtemos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2-1)'}{(x-1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{1} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2.$$ ◀

▶ Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

Solução: Temos

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty \qquad e \qquad \lim_{x \to \infty} x^2 = \infty.$$

Logo, a regra de l'Hospital fornece

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x}.$$

Como $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$ e $\lim\limits_{x \to \infty} (2x) = \infty$, o limite do lado direito também é indeterminado. Assim, aplicando a regra de l'Hospital novamente obtemos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$ ◀

Produtos Indeterminados

No caso de $\lim\limits_{x \to p} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to p} g(x) = \pm\infty$. Nada podemos falar sobre o limite de $f(x) \cdot g(x)$, sendo há uma indeterminação, pois há uma disputa entre f e g, se g ganha então o limite é $\pm\infty$, se perde então o limite é zero e se empata então é um valor finito. $\neq$ zero.

Entretanto, como é uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$, não podemos aplicar a regra de l'Hospital diretamente, todavia podemos reescrever o produto $f \cdot g$ como um quociente:

$$f \cdot g = \frac{f}{1/g} \qquad ou \qquad f \cdot g = \frac{g}{1/f}$$

Isso converte o limite dado para a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, de modo que

4

EXEMPLO: Calcule $\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln x$.

Solução: $\lim_{x\to 0} x \ln x = [0\cdot(-\infty)]$ que é uma indeterminação que poderá ser colocada na forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. De fato, escrevendo $x = \frac{1}{(1/x)}$ obtemos,

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right].$$

Assim, pela regra de L'Hospital temos

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln x = 0.$$

Diferenças Indeterminadas

No caso de $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \infty$, temos que o limite $\lim_{x\to p} (f(x) - g(x))$ é uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$, pois novamente há uma disputa entre f e g de maneira que a resposta será ∞ (se f ganhar), $-\infty$ (se g ganhar) ou um numero finito (se houver empate).

Para resolvermos este tipo de limite devemos converter a diferença em um quociente (através de um denominador comum ou colocando em evidência algum fator), de maneira a termos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

EXEMPLO: Calcule $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

Solução: Temos que $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = [\infty - \infty]$. Logo, precisamos escrever a diferença como um quociente. Manipulando, temos

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x\cdot \operatorname{sen} x} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Assim, aplicando a Regra de L'Hospital obtemos

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\cdot \operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x - x)'}{(x\cdot \operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Obtemos outra indeterminação, assim devemos utilizar a regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(\operatorname{sen} x+x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos x-x\operatorname{sen} x}=$$

$$=\frac{-0}{1+1-0}=-\frac{0}{2}=0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=0.$$

EXEMPLO: Calcule $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

Solução: Note que $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=[\infty-\infty]$. Note que

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sen} x}\right)$$

Como $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$ e $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2)'}{(\operatorname{sen} x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\cos x}=0.$

Segue que $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sen} x}\right)\right]=\infty\cdot 1=\infty.$

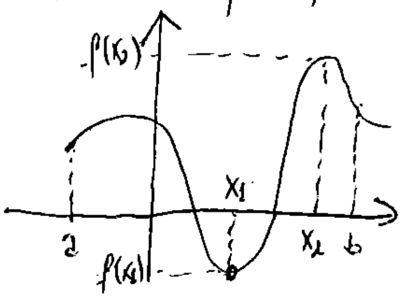
Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=\infty.$$

OBS: Sempre que $\lim_{x\to p}f(x)=\infty$, e $\lim_{x\to p}g(x)=\infty$ e $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}\neq 1$, proceda como no exemplo acima.

TEOREMA DE WEIERSTRASS, e Valor Intermediário BOLZANO

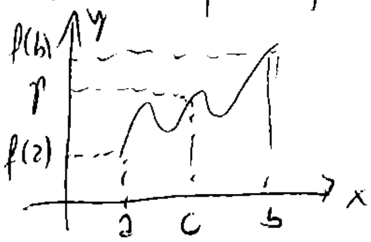
TEOREMA DE Weierstrass: Se f for contínua em $[a,b]$, então existe x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que $f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)$, $\forall x\in[a,b]$.



OBS: A necessidade de f ser contínua no intervalo fechado é indispensável, pois

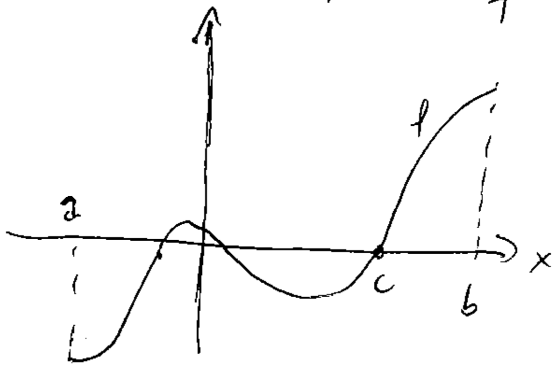
6

TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO: Se f for contínua em $[a,b]$ e se η for um numero real entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c em $[a,b]$ tal que $f(c)=\eta$.



Como um caso particular do teorema acima temos o teorema de Bolzano.

TEOREMA de Bolzano: Se f for contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um c em $[a,b]$ tal que $f(c)=0$.



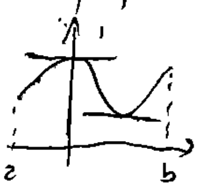
▶ **EXEMPLO:** Mostre que a equação $x^3-4x+8=0$ admite pelo menos uma raiz real.

Solução: Observe que $f(-3)=-7$, $f(0)=8$ e f é continua no intervalo $[-3,0]$. Então segue do Teorema de Bolzano que existe pelo menos um c em $[-3,0]$ tal que $f(c)=0$, isto é, a equação $x^3-4x+8=0$ admite pelo menos uma raiz real entre -3 e 0.

TEOREMA DE ROLLE e DO Valor médio

TEOREMA DE ROLLE: Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$.
2. f é derivavel no intervalo aberto (a,b).
3. $f(a)=f(b)$.



Então ...

▶ EXEMPLO: Demonstre que a equação $x^3+x-1=0$ tem exatamente uma raiz real! (7)

Solução: Primeiro usamos o teorema de Bolzano p/ mostrar que existe uma raiz. De fato, seja $f(x)=x^3+x-1$, então $f(0)=-1$, $f(1)=1$ e f é contínua em $(0,1)$, então pelo Teorema de Bolzano existe pelo menos uma raiz p/ $x^3+x-1=0$.

Agora para mostrar que a equação não tem outra raiz real, usamos o teorema de Rolle e argumentamos por contradição (absurdo).

De fato, suponha por absurdo que $x^3+x-1=0$ tenha duas raizes a e b. Então $f(a)=0=f(b)$. Como f é derivável em (a,b) e contínua em $[a,b]$ por ser uma função polinomial, temos pelo Teorema de Rolle que existe um número c entre a e b tal que $f'(c)=0$. Mas

$$f'(x)=3x^2+1\geq 1 \quad , \quad \forall x\in(a,b)$$

Então nunca podemos ter $f'(x)=0$. O que é uma contradição. Portanto a equação não pode ter duas raizes reais. ◀

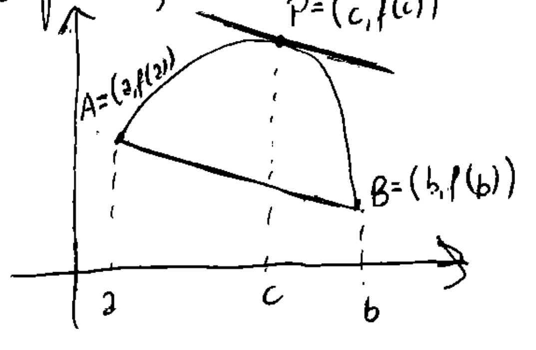
TEOREMA DO VALOR MÉDIO: Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

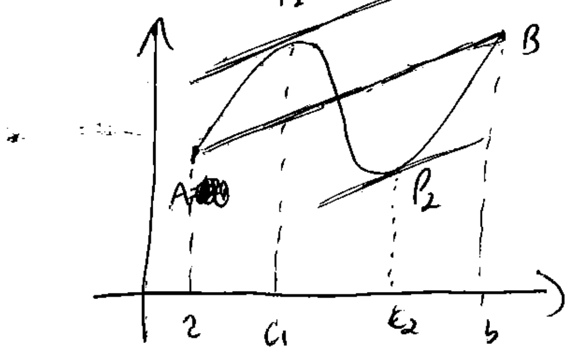
1. f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$.
2. f é derivável no intervalo aberto (a,b).

Então, existe um número c em (a,b) tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{ou} \quad f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

• Interpretação Geométrica





Há pelo menos um ponto P onde a reta tangente é paralela à reta AB

EXEMPLO: Ilustremos o teorema do valor médio considerando (8) $f(x) = x^3 - x$, $a=0$, $b=2$. Como f é um polinômio então ele é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema do valor médio, existe um número c em $(0,2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)\,(2-0).$$

Como $f(2)=6$, $f(0)=0$ e $f'(x) = 3x^2 - 1$, obtemos

$$6 = (3c^2-1)2 \Rightarrow 6 = 6c^2 - 2 \Rightarrow 6c^2 = 8 \Rightarrow c^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Devido ao fato de $c \in (0,2)$, temos que $c = 2/\sqrt{3}$.

1

Aula 11

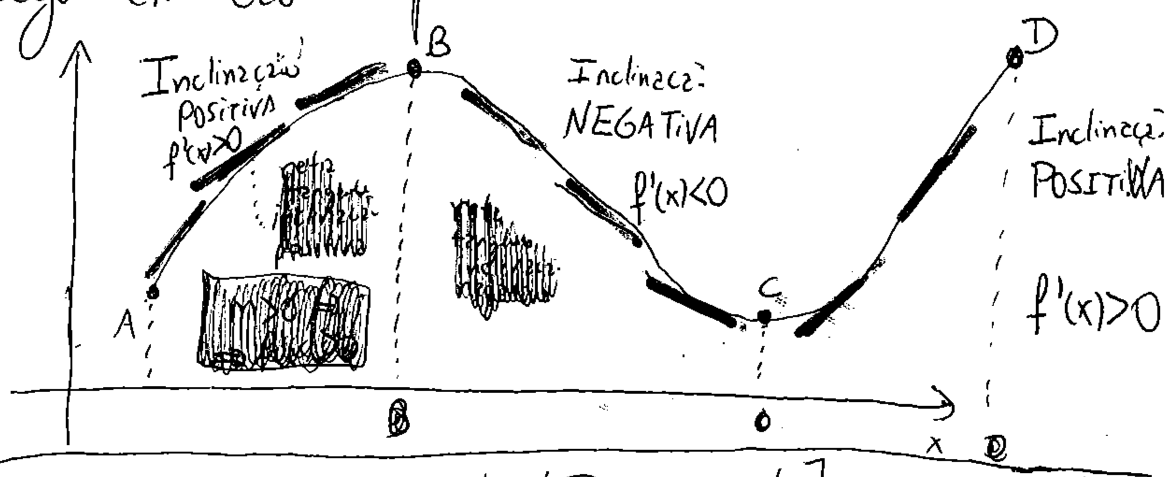
Objetivos:

- Realizar um estudo dos intervalos de Crescimento e decrescimento de funções.
- Introduzir o conceito e formas de determinar concavidades e pontos de inflexão.

// //

Intervalos de Crescimento e Decrescimento

Como $f'(x)$ representa a inclinação da curva $y=f(x)$ no ponto $(x, f(x))$, elas nos informa p/ qual direção a curva segue em cada ponto



TEOREMA: [Teste Crescente / Decrescente]

Seja f contínua no intervalo $I=(a,b)$.

a) Se $f'(x)>0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente crescente em I.

b) Se $f'(x)<0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente decrescente em I.

OBS No teorema anterior devemos ter que $x \in I$, mas x não é extremidade de I.

EXEMPLO: Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$. Esboce o gráfico. ②

Solução: Observe que

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

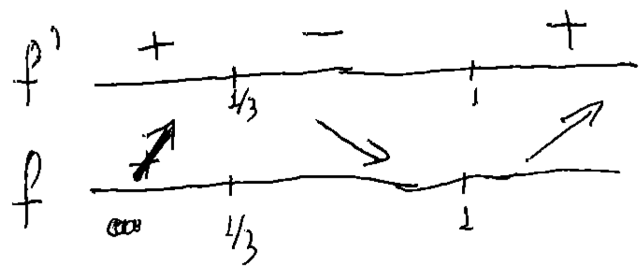
Assim

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \iff \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = 1/3. \end{cases}$$

Então

Intervalo	$f'(x)$	f
$(-\infty, 1/3)$	$+$	crescente em $(-\infty, 1/3)$
$(\frac{1}{3}, 1)$	$-$	decrescente em $(\frac{1}{3}, 1)$
$(1, \infty)$	$+$	crescente em $(1, \infty)$

Ou



$$\left(\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ em } (-\infty, 1/3) \text{ e } (1, \infty) \\ f'(x) < 0 \text{ em } (\frac{1}{3}, 1) \end{cases}\right)$$

$$\left(\begin{cases} f \text{ est. crescente em } (-\infty, 1/3) \text{ e } (1, \infty) \\ f \text{ est. decrescente em } (\frac{1}{3}, 1) \end{cases}\right)$$

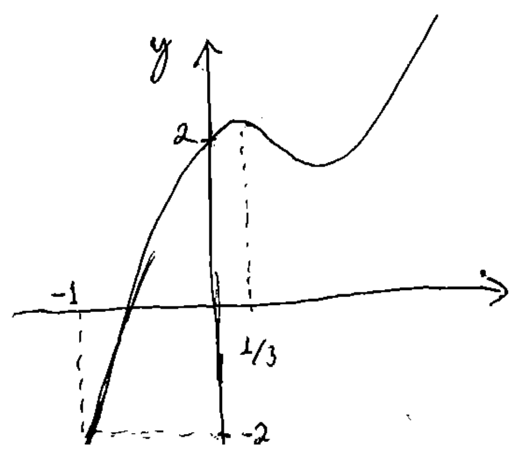
Antes de esboçar o gráfico de f vamos calcular os limites de f para $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x \to \infty} [x^3 - 2x^2 + x + 2] = \lim_{x \to \infty} x^3 \left[1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right] = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} [x^3 - 2x^2 + x + 2] = -\infty.$$

Gráfico de f

x	$f(x)$
-1	-2
0	2
1	2
$\frac{1}{3}$	$\frac{58}{27}$

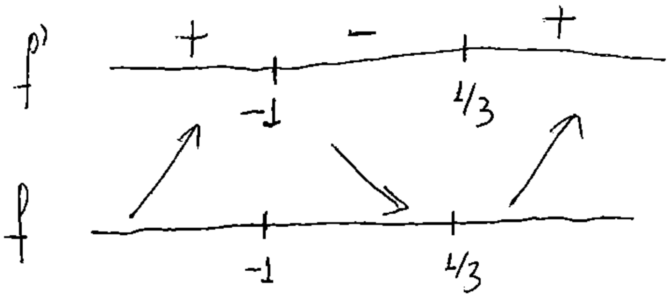


EXEMPLO: Seja $f(x) = \dfrac{x^2-x}{1+3x^2}$. Estude f com relação a crescimento e decrescimento. Esboce o gráfico.

Solução: $f'(x) = \dfrac{3x^2+2x-1}{(1+3x^2)^2}$.

Como $(1+3x^2)^2 > 0$ para todo x, o sinal de f' é o mesmo que o do numerador.

$$3x^2+2x-1=0 \iff \begin{cases} x=-1 \\ x=1/3 \end{cases}$$



Então,

$$\begin{cases} f \text{ é estritamente crescente em } (-\infty,1) \text{ e } \left(\frac{1}{3},\infty\right) \\ f \text{ é estritamente decrescente em } \left(-1,\frac{1}{3}\right). \end{cases}$$

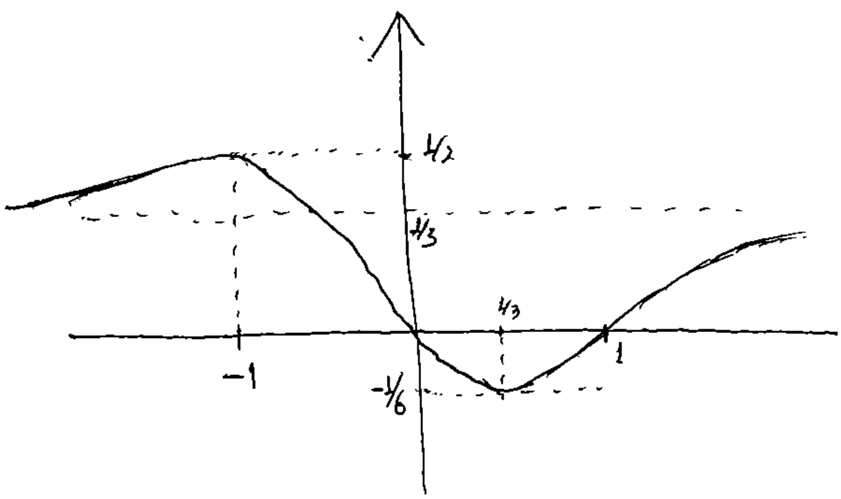
Temos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x}{1+3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x}{1+3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Gráfico de f

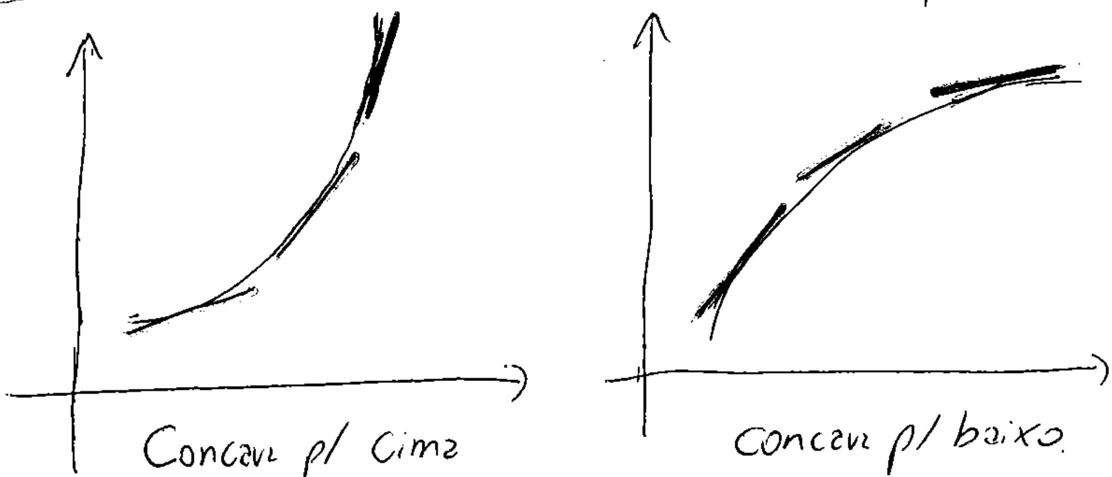
x	$f(x)$
-1	$1/2$
0	0
1	0
$1/3$	$-1/6$



OBS: Chamamos essa linha tracejada de $y=1/3$ de assíntota horizontal

Concavidade e Pontos de Inflexão

④



DEFINIÇÃO [Concavidade] Seja f uma função definida numa intervalo aberto I. Então, dizemos que

a) f é concava para cima, se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, i.e.,

$$f(x) > T(x) = f(p) + f'(p)(x-p), \quad p/\ x, p \in I.$$

b) f é concava para baixo, se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes no intervalo I, i.e.,

$$f(x) < T(x) = f(p) + f'(p)(x-p), \quad p/\ x, p \in I.$$

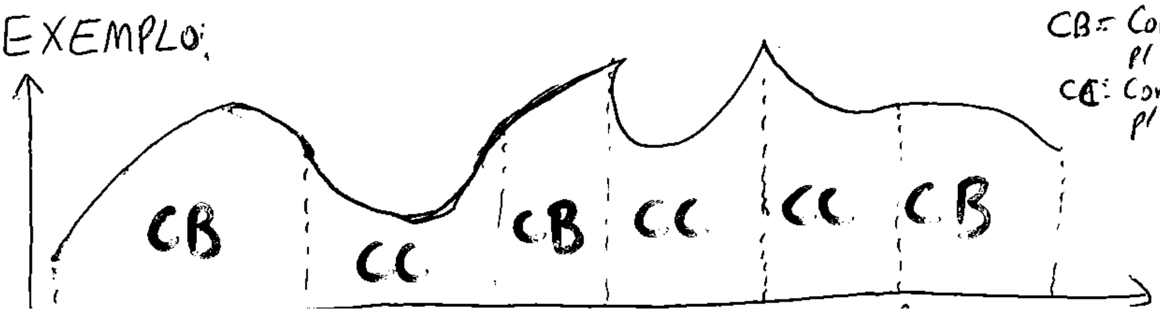
Teste da Concavidade: Seja f uma função que admite derivada até a 2ª ordem no intervalo aberto I.

(a) Se $f''(x) > 0$ em I, então o gráfico de f é côncavo p/ cima em I

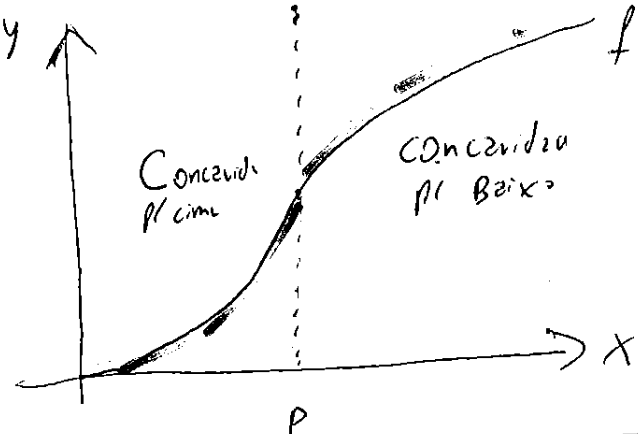
(b) Se $f''(x) < 0$ em I, então o gráfico de f é côncavo p/ baixo em I

▶ EXEMPLO:

CB = Concavidade p/ Baixo
CC: Concavidade p/ Cima



5



DEFINIÇÃO [Ponto de Inflexão] Um ponto p na curva $y=f(x)$ é chamado <u>ponto de inflexão</u> se f é contínua no ponto p e a curva muda de côncava p/ cima p/ côncava p/ baixo ou vice-versa em p.

EXEMPLO: Esboce o gráfico de $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Solução: Observe que

$$f'(x)=-xe^{-x^2/2} \quad \text{e} \quad f''(x)=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

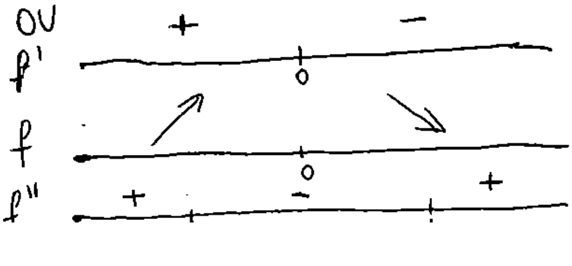
Assim,

$$\begin{cases} -xe^{-\frac{x^2}{2}}=0 \overset{e^{-x^2/2}>0}{\Longleftrightarrow} x=0 \\ (x^2-1)e^{-x^2/2}=0 \overset{e^{-x^2/2}>0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x=-1 \\ \text{ou} \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

Então

Intervalo	$f'(x)$	$f''(x)$	f	Concavidade
$(-\infty,-1)$	$+$	$+$	Crescente	p/ cima
$(-1,0)$	$+$	$-$	Crescente	p/ baixo
$(0,1)$	$-$	$-$	Decrescente	p/ baixo
$(1,\infty)$	$-$	$+$	Decrescente	p/ cima

ou



$\left(\begin{cases} f'(x)>0 \text{ em } (-\infty,0) \\ f'(x)<0 \text{ em } (0,\infty) \end{cases}\right)$

$\left(\begin{cases} f \text{ est. crescente em } (-\infty,0) \\ f \text{ est. decrescente em } (0,\infty) \end{cases}\right)$

$\left(\begin{cases} f''(x)>0 \text{ em } (-\infty,-1) \text{ e } (1,\infty) \\ f''(x)<0 \text{ em } (-1,1). \end{cases}\right)$

... concavidade para cima em $(-\infty,-1)$ e $(1,\infty)$)

6

Agora como f troca de concavidade nos pontos -1 e 1, temos que pontos de inflexão: -1 e 1.

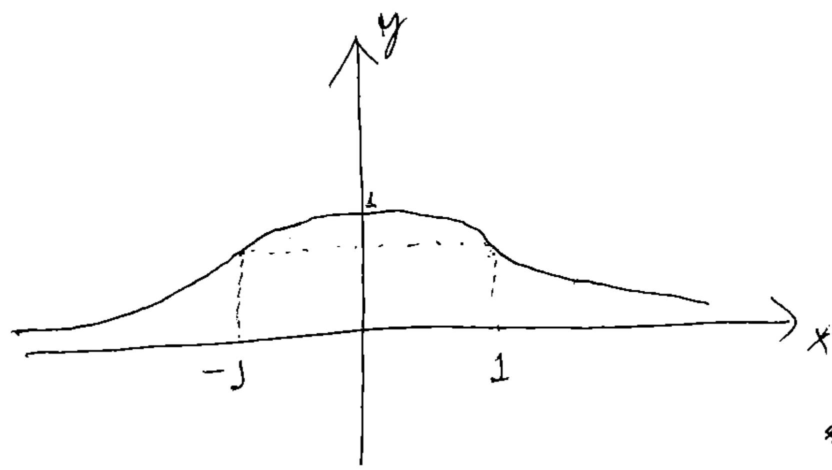
Por fim, estudando o limite no infinito, temos

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \quad e \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x^2/2} = 0.$$

Portanto,

Gráfico de f

x	$f(x)$
0	1
-1	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
1	$1/\sqrt{e}$



~~Vimos que $f''(p)=0$ é um ponto importante pois nos ajuda a determinar o ponto de inflexão, mas observe que nem sempre que a derivada segunda é nula encontramos um ponto de inflexão~~

Vimos que o ponto p tal que $f''(p)=0$ é um ponto importante, pois nos ajuda a determinar os pontos de inflexão. Vamos ver condições necessárias e suficientes para afirmarmos que p é um ponto de inflexão.

TEOREMA: Seja f derivável até 3^a ordem no intervalo aberto I e seja $p \in I$. Então, se $f''(p)=0$ e f''' contínua em p satisfazendo $f'''(p) \neq 0$, segue que p é ponto de inflexão

OBS Observe que

$$f''(p)=0 \not\Longrightarrow p \text{ é um ponto de inflexão}$$

Basta olhar para a função $f(x)=x^4$, que possui $f''(0)=0$ mas 0 não é ponto de inflexão.

(7)

EXEMPLO: Examine a curva $y = x^3 - x^2 - x + 1$ em relação à concavidade, crescimento e decrescimento e pontos de inflexão. Use essas informações para esboçar a curva.

Solução: Observe que

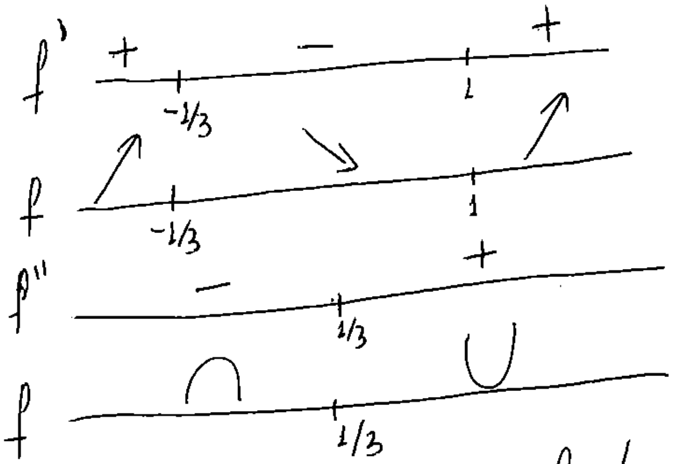
$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \quad ; \quad f''(x) = 6x - 2 \quad \text{e} \quad f'''(x) = 6$$

Assim,

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 = 0 \iff \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -1/3 \end{cases} \\ 6x - 2 = 0 \iff x = 1/3 \end{cases}$$

Agora, como $f''(\frac{1}{3}) = 0$ e $f'''(\frac{1}{3}) \neq 0$, temos,

$$\boxed{\text{Ponto de inflexão: } 1/3}$$



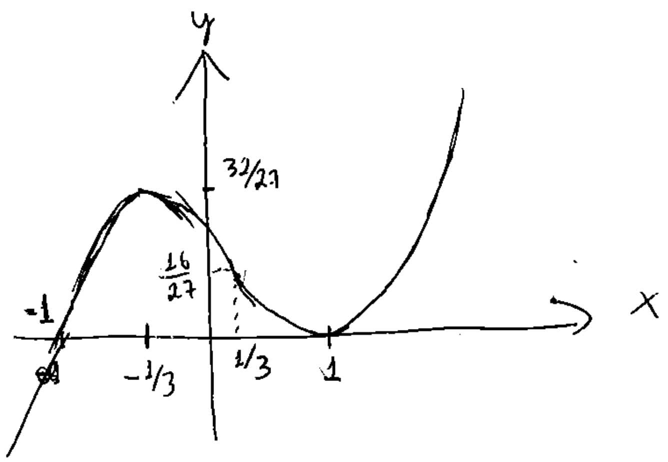
Por fim, estudando o limite no infinito, temos

$$\lim_{x \to \infty} [x^3 - x^2 - x + 1] = \lim_{x \to \infty} x^3 \left[1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} [x^3 - x^2 - x + 1] = -\infty.$$

Portanto

x	$f(x)$
1	0
-1	0
$-1/3$	$\frac{32}{27}$
$1/3$	$16/27$
0	1



(1)

Aula 12

Objetivos:

- Introduzir os conceitos e resultados sobre máximos e mínimos.
- Estudar problemas de otimização matemática

MÁXIMOS E MÍNIMOS

Vimos na aula passada, que um ponto c tal que $f'(c)=0$ está relacionado com o momento que uma determinada função deixa de ser crescente p/ se tornar decrescente, ou vice-versa. No gráfico, observa-se que tais pontos são "picos" da função, podendo assim caracterizá-los na medida do possível, como máximos e mínimos da função.

DEFINIÇÃO [MÁXIMO e Mínimo Global] Sejam f uma função e $p \in D_f$. Então $f(p)$ é o

(a) <u>valor máximo global de f</u> (ou p é um ponto de máximo global de f) se

$$f(p) \geq f(x); \qquad \forall x \in D_f$$

(b) <u>valor mínimo global de f</u> (ou p é um ponto de mínimo global de f) se

$$f(p) \leq f(x); \qquad \forall x \in D_f$$

DEFINIÇÃO [Máximo/Mínimo Local] Sejam f uma função e $p \in D_f$. Então $f(p)$ é um

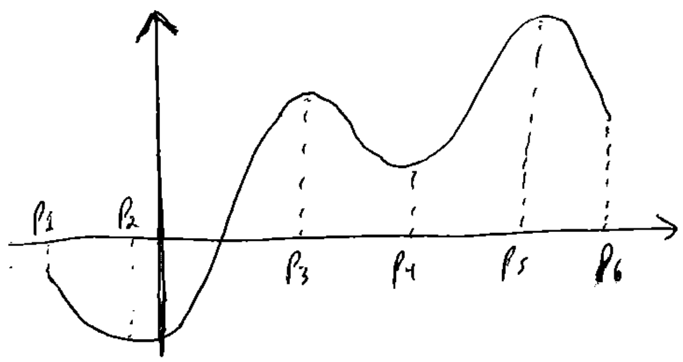
(a) <u>valor máximo local de f</u> (ou p é um ponto de máximo local de f) se

$$f(p) \geq f(x); \quad \text{quando } x \text{ está próximo de } p \ (\text{caso } x \in D_f, |x-p|<\delta)$$

(b) <u>valor mínimo local de f</u> (ou p é um ponto de mínimo local de f) se

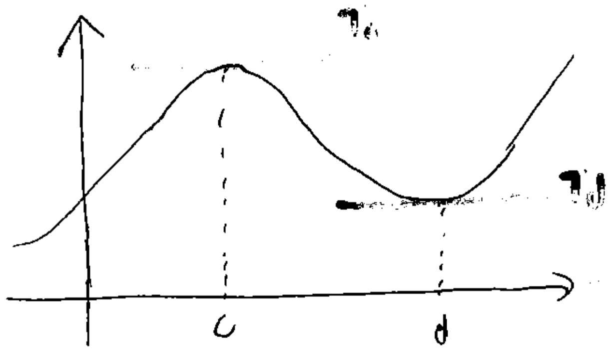
$$f(p) \leq f(x); \quad \text{quando } x \text{ está próximo de } p. \ (\text{caso } x \in D_f \text{ tq } |x-p|<\delta)$$

②



$p_1 \longrightarrow$ ponto de máximo local
$f(p_2) \longrightarrow$ valor mínimo global de f
$p_3 \longrightarrow$ ponto de máximo local
$p_4 \longrightarrow$ ponto de mínimo local
$f(p_5) \longrightarrow$ valor máximo global de f
$p_6 \longrightarrow$ ponto de mínimo local

Teorema de Fermat e Pontos Críticos.



Note que se c e d são valores máximo e mínimos locais então

$$m_{T_c} = m_{T_d} = 0 \Longrightarrow f'(c) = f'(d) = 0.$$

TEOREMA DE FERMAT: Seja f uma função derivável em p, em que p é um ponto interior a D_f. Se f tiver um máximo ou mínimo local em p e se $f'(p)$ existir, então $f'(p)=0$.

OBS: Note que a recíproca do Teorema de Fermat não é válida ($f'(c)=0 \not\Longrightarrow$ c é máximo ou mínimo). Pois se $f(x)=|x|$, temos que $f(0)=0$ é um valor de mínimo (global e local), mas $f'(0)$ não existe.

DEFINIÇÃO [Ponto Crítico]: Chamamos um ponto $p \in D_f$ de ponto crítico de f se

$$f'(p)=0$$

EXEMPLO: Determine os pontos críticos de $f(x)=x^3(4-x)$.

Solução:

$$f'(x) = (x^3)'(4-x) + x^3(4-x)' = (3x^2)(4-x) + x^3\cdot(-1)$$
$$= 12x^2 - 3x^3 - x^3 = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3-x)$$

Então

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=3 \end{cases}$$

Condições Necessárias e Suficientes para máximos e mínimos locais

(3)

Vimos que uma condição necessária para que um ponto p seja ponto de máximo ou mínimo local de uma função f é que p seja um ponto crítico de f (i.e, $f'(p)=0$).

Agora vamos estabelecer uma condição suficiente para que um ponto p seja ponto de máximo ou de mínimo local.

> **TEOREMA** [Teste da 2ª Derivada] Seja f uma função que admite derivada de 2ª ordem contínua no intervalo aberto I e $p \in I$. Logo:
>
> a) Se $f'(p)=0$ e $f''(p)>0$, então f tem um mínimo local em p.
>
> b) Se $f'(p)=0$ e $f''(p)<0$, então f tem um máximo local em p.

OBS: O teste da segunda derivada é inconclusivel quando $f''(p)=0$ ou quando $f''(c)$ não existe

▶ **EXEMPLO**: Determine os pontos críticos e classifique-os (ponto de maximo/mínimo local ou ponto de inflexão) referentes a função $f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3-2x^2+3$.

Solução: Para determinarmos os pontos críticos, devemos encontrar quais pontos satisfazem $f'(p)=0$. Pois bem, note que

$$f'(x)=x^3-3x^2-4x=x(x^2-3x-4) \Longrightarrow f'(x)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=-1 \\ \text{ou} \\ x=4 \end{cases}$$

Agora, estudando a segunda derivada temos

$$f''(x)=3x^2-6x-4 \Longrightarrow \begin{cases} f''(0)=-4 \\ f''(-1)=5 \\ f''(4)=20 \end{cases}$$

Então -1 e 4 são pontos de mín. local e 0 um ponto de máx. local.

4

Máximo e Mínimo de Função Contínua em Intervalo Fechado

Pelo Teorema de Weierstrass, temos que se f é contínua num intervalo fechado, então f assume valores de máximo e mínimo absoluto nesse intervalo. Assim, tal máximo/mínimo tem que ser local ou acontece em uma extremidade do intervalo. O procedimento a seguir nos permite determinar os máximo/mínimo global de uma função num intervalo fechado.

Máximo/Mínimo em Intervalo Fechado

Para encontrar os valores máximo e mínimo globais de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a,b]$, devemos:

1º. Encontrar os valores de f nos pontos críticos em (a,b).

2º Encontrar os valores de f nas extremidades do intervalo.

3º Então o maior valor das etapas 1 e 2 será o valor de máximo global, enquanto o menor será o valor de mínimo global

EXEMPLO: Encontre o valor máximo e mínimos globais da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ no intervalo $[-\frac{1}{2}, 4]$

Solução: Como f é contínua em $[-\frac{1}{2}, 4]$, o ponto de máximo/mínimo global será ou o ponto de ~~máximo/mínimo local~~ crítico ou as extremidades.

Pois bem, observe que

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \iff \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = 0. \end{cases}$$

Logo, 2 e 0 são pontos críticos. e as extremidades são $-\frac{1}{2}$ e 4.

Assim, os valores de f nos pontos críticos e extremidades são:

$$f(0) = 1 \; ; \; f(2) = -3 \; ; \; f(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} \quad \text{e} \quad f(4) = 17.$$

Comparando esses quatro valores, chegamos a conclusão que o valor máximo global é $f(4) = 17$ enquanto o valor mínimo global é $f(2) = -3$.

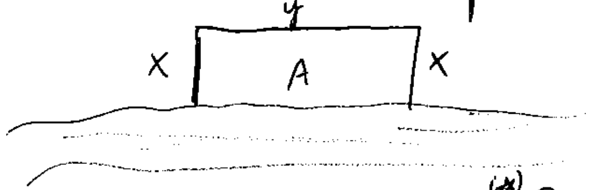
5

Problemas de Otimização

São problemas práticos que envolvem maximizar/minimizar determinadas quantidades.

Problema 1: Um fazendeiro tem 1200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Como sua ideia é colocar gado nesse cercado, ele não deseja cercar a água. Quais são as dimensões do campo que ele tem que cercar, de forma que ele obtenha a maior área?

Solução: Podemos visualizar o problema na figura abaixo



Logo, a área do campo é $A = xy$ (*). Queremos expressar A em termos de apenas uma variável, p/ isso usamos o vínculo de que só temos 1200 m cerca, ou seja,

$$2x + y = 1200 \implies y = 1200 - 2x \quad (**)$$

Levando (**) em (*), obtemos

$$A = x(1200 - 2x) = 1200x - 2x^2.$$

Observe que $A = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 600 \end{cases}$, de forma que devemos ter que $x \in [0, 600]$, pois caso contrário teríamos A negativo, o que não faz sentido, pois a área não é negativa.

Logo, a função que desejamos maximizar é

$$A(x) = 1200x - 2x^2, \qquad 0 \leq x \leq 600.$$

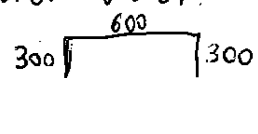
Como,

$$A'(x) = 1200 - 4x = 0 \iff \{ x = 300.$$

Temos que 300 é um ponto crítico enquanto 0 e 600 são os extremos. Uma vez que

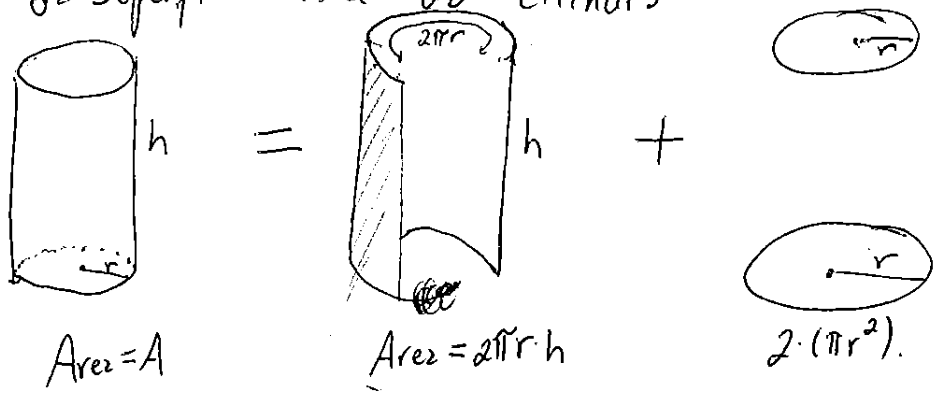
$A(0) = 0$; $A(300) = 180000$ e $A(600) = 0$, obtemos então que $x = 300$ é o valor de x que faz A assumir o maior valor.

Portanto, o campo retangular deve ter 300 m de profundidade



PROBLEMA 2: Uma lata cilíndrica deve ser construída de forma a poder receber 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal p/ produzir a lata. ⑥

Solução: Para minimizar o custo de material, devemos minimizar a área da superfície total do cilindro



Logo, a área da superfície é

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \qquad (\heartsuit)$$

Como devemos ter que o volume é 1L, então

$$V = 1L \Rightarrow V = 10^3 cm^3 \Rightarrow \pi r^2 h = 1000 \qquad (\heartsuit\heartsuit)$$

Levando $(\heartsuit\heartsuit)$ em $(\heartsuit)$, obtemos

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

Portanto, a função que queremos minimizar é

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, \qquad r > 0.$$

Assim

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \{\pi r^3 - 500 = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{500/\pi}$$

De forma que $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ é um ponto crítico. Uma vez que o domínio de A é $(0,\infty)$ não podemos argumentar como no exemplo anterior.

Podemos então proceder na argumentação de que $A(r) \to \infty$ quando $r \to 0^+$ e $A(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$, de forma que deve existir um valor mínimo de $A(r)$, que deve ocorrer no ponto crítico, como só existe um ponto crítico, temos que $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ é um mínimo absoluto.

O valor de h correspondente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ é

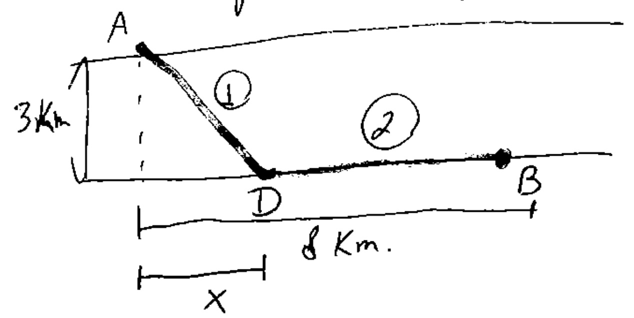
$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi (500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r.$$

Portanto, p/ minimizar o custo da lata, o raio deve ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ e a

7

Problema 3: Uma pessoa lança seu bote em um ponto A na margem de um rio reto, com uma largura de 3 Km, e deseja atingir tão rápido quanto possível um ponto B na outra margem, 8 Km rio abaixo. Sabendo que ela rema a uma velocidade de 6 Km/h e anda a 8 Km/h, qual o caminho que ela deve tomar de forma a chegar em B o mais rápido possível.

Solução: Podemos pensar no problema pelo esquema abaixo.



Temos que

$$\text{tempo} = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}}$$

Assim, por pitágoras temos que o tempo total T é dado por

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8} \quad , \quad p/\ x \in [0,8]$$

Vamos então determinar os pontos críticos, Assim como $x \geq 0$, temos

$$T'(x) = 0 \iff \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8} = 0 \iff 4x = 3\sqrt{x^2+9} \iff 16x^2 = 9(x^2+9)$$

$$\iff 7x^2 = 81 \iff x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

Assim temos que $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$ é ponto crítico e 0, e 8 são extremidades do domínio. Para verificarmos se o mínimo ocorre no ponto crítico ou nas extremidades, devemos calcular T em todos os três pontos.

$$T(0) = 1{,}5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1{,}33 \quad \text{e} \quad T = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1{,}42.$$

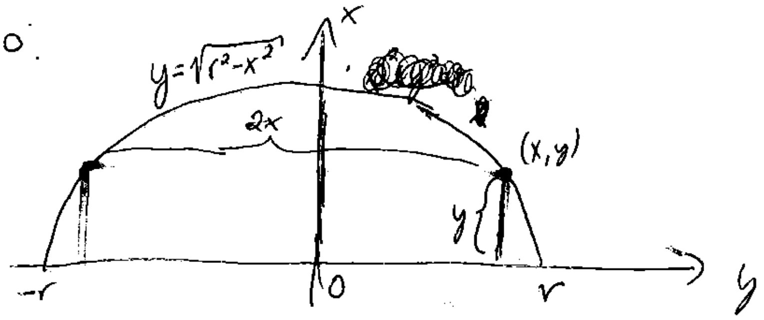
Uma vez que o menor valor de T ocorre quando $x = 9/\sqrt{7}$, então ele é o ponto de mínimo global.

Portanto, a pesso deve remar até o ponto $9/\sqrt{7}$ Km ($\approx 3{,}4$ Km) rio abaixo a partir do ponto inicial

8

Problema 4: Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r.

Solução:



A equação do semi-circulo superior é

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}. \quad (*)$$

A area do retângulo é

$$A = 2x \cdot y. \quad (**)$$

Substituindo (*) em (**), obtemos,

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}, \quad p/ \quad 0 \leq x \leq r.$$

Assim,

$$A'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Desta maneira

$$A'(x) = 0 \iff \left\{ r^2 - 2x^2 = 0 \overset{\text{como } x \geq 0}{\iff} x = \frac{r}{\sqrt{2}} \right.$$

Logo $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ é um ponto crítico e 0 e r são extremidades. Avaliando a função nesses pontos, obtemos

$$A(0) = 0 \; ; \; A(r) = 0 \quad e \quad A\left(\frac{r}{2}\right) = 2 \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2.$$

Portanto, a área do maior retângulo que pode ser inscrito é $A = r^2$.

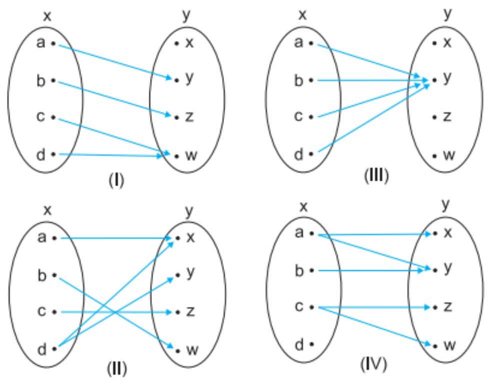
Lista de Exercício 1

Cálculo 1

Professor Daniel

Exercício 1:

Verifique se é função e se possível classifique-as :



Exercício 2:

Considere os conjuntos : $A = a, b, c, d$, $B = 1, 2, 3, 4, 5$. Verifique quais alternativas definem uma função de A em B e caso contrário, justifique.

a) $(a,1),(b,3),(c,2)$

b) $(a,3),(b,1),(c,5),(a,1)$

c) $(a,1),(b,1),(c,1),(d,1)$

d) $(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(a,5)$

e) $(1,a),(2,b),(3,c),(4,d),(5,a)$

Exercício 3:

Calcule $f(g(x))$ sendo :

a) $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x+2$

b) $f(x) = x^2 - 5x$ e $g(x) = 3x+2$

c) $f(x) = 3x+2$ e $g(x) = 6x-1$

Exercício 4:

Uma locadora A de automóveis cobra $R\$90,00$ por dia de aluguel de um certo carro. Uma outra locadora B cobra, pelo mesmo modelo de carro, um valor fixo de $R\$210,00$, mais $R\$80,00$ por dia de aluguel. Seja n o número de dias que um cliente pretende alugar este carro.

a) Para que valores de n é preferível a empresa A ?

b) Qual deveria ser o valor fixo cobrado pela locadora B, para que B fosse preferível para n > 27 dias ?

Exercício 5:

Duas plantas de mesma espécie A e B, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento h, em centímetros, dessas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta A é uma reta passando por (2, 3) e o que representa o crescimento da planta B pode ser descrito pela lei matemática $h = \dfrac{24t - t^2}{12}$.Determine : a) a equação da reta ; b) o dia em que as plantas A e B atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.

Exercício 6:

Considere o polinômio do 2° grau $ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$, b e c são reais dados.

a) Conclua que, se $b^2 - 4ac \geq 0$, as raízes são dadas pela fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

b) Sejam x_1 e x_2 raízes do item anterior. Verifique que

i) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

ii) $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

iii) $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exercício 7:

Calcule o valor de seno, cosseno e tangente de (a) 15°, (b)75°, (c) 105°, (d) 120°

Exercício 8:

Utilize as leis dos senos para resolver os itens abaixo : (faça um esboço geométrico para uma visualização do problema). Em um triângulo ABC, temos :

1. $BC = 2\sqrt{2}$, $\hat{A} = 135°$ e $\hat{C} = 15°$. Encontre o valor do lado AC. (R : 2)
2. $AB = 1$, $\hat{B} = 45°$ e $\hat{C} = 120°$. Encontre o valor do lado AC. (R : $\sqrt{2/3}$)
3. $AC = 12$, $\hat{A} = 30°$ e $\hat{B} = 105°$. Encontre o valor do lado AC. (R : $12\sqrt{2}$)

Exercício 9:

Utilize as leis dos cossenos para resolver os itens abaixo : (faça um esboço geométrico para uma visualização do problema)

1. Um terreno de forma triangular tem frente de 10 m e 20 m, em ruas que formam, entre si, um ângulo de 120º. Qual a medida do terceiro lado do terreno ? (R : $10\sqrt{7}$
2. Dois lados de um triângulo medem 8 m e 10 m e formam um ângulo de 60°. O terceiro lado desse triângulo mede ? (R : $2\sqrt{21}$)
3. Qual é a medida do lado oposto ao ângulo de 30°, em um triângulo, sabendo que os outros dois lados medem 2 e $\sqrt{3}$.(R : 1)
4. Calcule o seno do maior ângulo de um triângulo cujos lados medem 4, 6 e 8 metros. (R : $\sqrt{15}/4$

Exercício 10:

Mostre que $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$. Dica : Parta do lado esquerdo da equação, estabeleça as definições de sec e tan e depois manipule a expressão a fim de utilizar a relação fundamental.

Exercício 11:

Considere que $\tan x = 2$ e $x \in (0°, 90°)$. Calcule $\cot x$, $\sec x$, $\cos x$, $\sin x$, $\csc x$.

Exercício 12:

Calcule a solução da equação

$$\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x = 0$$

para $x \in (0°, 180°)$

Exercício 13:

Quais das afirmativas abaixo estão corretas, caso contrário, corrija :

(a) $\sec 840° = -\csc 30°$
(b) $\cos 225° < \cos 215°$
(c) $\sin 160° > \sin 172°$
(d) $\tan 92° = -\tan 88°$
(e) $\tan 178° = -\tan 88°$
(f) $\tan 268° = -\tan 88°$
(g) $\tan 272° = -\tan 88°$

Exercício 14:

Calcule $y = \sin(123° + a) - \sin(57° - a)$

Exercício 15:

Esboce o gráfico, determine o domínio e o conjunto imagem da função :

a) $f(x) = x^2 - |x| - 6$

b) $f(x) = |x| - 1$

c) $f(x) = |2x - 4|$

Exercício 16:

Um capital de $R\$12.000,00$ é aplicado a uma taxa anual de 8%, sob o regime de juros compostos (juros são calculados sobre os próprios juros devidos).

a) Desenvolva uma formula para o capital acumulado e qual seria o mesmo após 2 anos.

b) o número inteiro mínimo de anos necessários para que o capital acumulado seja maior que o dobro do capital inicial.

Exercício 17:

Resolva as equações exponenciais, determinando os correspondentes valores de x

a) $7^{x-3} + 7^{x-2} + 7^{x-1} = 57$ (Dica : coloque 7^{x-3} em evidência) (R :x=3)

b) $4^x - 4^{x+1} = 24$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 27$

Exercício 18:

Utilize as propriedade dos exponentes para reescrever e simplificar as expressões

a) $f(x) = \frac{4^{-3}}{2^{-8}}$

b) $g(x) = x(3x^2)^3$

c) $h(x) = \frac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$

d) $k(x) = (a + \sqrt{b+1})^2$

Exercício 19:

Se $\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10}}}$. Qual o valor do logaritmo decimal de y ?

Exercício 20:

A relação $P(t) = P_0(1+r)t$, em que $r > 0$ é constante, representa uma quantidade P que cresce exponencialmente em função do tempo $t > 0$. P_0 é a quantidade inicial e r é a taxa de crescimento num dado período de tempo. Esboce uma formula $T(r)$ que representa o tempo necessário para a quantidade P dobrar.

Exercício 21:

Sob condições ideias, o número de bactérias numa cultura cresce de acordo com a expressão $n(t) = n_0 e^{2t}$, onde t está em minutos. Após quanto tempo a colonia possuirá quadruplicará a população inicial ? (OBS : $\ln(4) = 1,4$)

Lista de Exercícios 2

Cálculo 1

Professor Daniel Borin

Exercício 1:

Calcule os limites a seguir justificando cada passagem.

a) $\lim_{x\to 3}(x^2+2x+6)$

b) $\lim_{x\to 1}(2x^2-3x+4)$

c) $\lim_{x\to 2}(3x-2)$

d) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

e) $\lim_{x\to 2}(2x-4)$

f) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$

g) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

h) $\lim_{x\to 0}\dfrac{5x^4+x^2}{5x^2-2x}$

Exercício 2:

Calcule caso exista. Se não existir, justifique

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$

b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.

c) $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ em que

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } x\geq 1 \\ 2x & \text{se } x<1 \end{cases}$$

d) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

Exercício 3:

Calcule os limites a seguir justificando cada passagem

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$

b) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x+4}{x^2+8x+9}$

c) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-8x+5}{x^2+2x-7}$

d) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{-6x+1}{x^4+x+12}$

Exercício 4:

O deslocamento (em metros) de duas partículas movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s_1=t^2$ e $s_2=1/t^2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade das partículas (pela definição) nos instantes a) $t=a$, b) $t=1$, c) $t=2$ e d)$t=3$.

Exercício 5:

Encontre a equação da reta tangente da funções

a) $f(x)=x^2$ no ponto $(2,f(2))$.

b) $f(x)=\sqrt{x}$ no ponto $(9,f(9))$.

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ no ponto $(2,f(2))$.

d) $f(x)=x^2-x$ no ponto $(1,f(1))$.

Exercício 6:

Calcule $f'(x)$ pela definição

a) $f(x)=x^2+x$

b) $f(x)=2x^3$

c) $f(x)=7x$

d) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

e) $f(x)=2x-1$

f) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

g) $f(x)=10$

h) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

Lista de Exercícios 3

Cálculo 1

Professor Daniel Borin

Exercício 1:

Encontre a reta tangente à função

a) $y = \dfrac{3}{x}$ no ponto (3,1)

b) $y = x^2 - 8x + 9$ no ponto (3,-6).

c) $y = 4x - 3x^2$ no ponto (2,-4).

d) $y = \sqrt{x}$ no ponto (1,1).

e) $f(x) = x^2$ em $p = 2$

f) $f(x) = \frac{1}{x}$ em $p = 2$

g) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 9$

h) $f(x) = x^2 - x$ em $p = 1$

Exercício 2:

Se uma bola for atirada ao ar com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $y = 10t - 4,9t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

Exercício 3:

Calcule $g'(x)$, sendo g dada por.

a) $g(x) = x^6 + x^2$

b) $g(x) = x^{-3}$

c) $g(x) = x^{100} - e^x$

d) $g(x) = \frac{1}{x}$

e) $g(x) = \sqrt{x} + 5^x$

f) $g(x) = \sqrt[7]{x} + \ln(x)$

g) $g(x) = x^{3/2}$

h) $g(x) = \frac{1}{x^2}$

Exercício 4:

Encontre a 27ª derivada de $\cos x$.

Exercício 5:

Calcule a derivada de $f(x)$ dada por :

a) $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$

b) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cot x$

c) $f(x) = 5\cos x + 3\csc x$

d) $f(x) = 3\tan x - \sec x$

Exercício 6:

Calcule $f'(p)$:

a) $f(x) = \cos x + (x^2 + 1)\sin x$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x\sin x}$

c) $f(x) = e^x \cos x$

d) $f(x) = x^2 \ln x + 2e^x$

e) $f(x) = xe^x \cos x$

f) $f(x) = x^2 \ln x \cos x$

Exercício 7:

Derive

a) $f(x) = \sin 4x$

b) $f(x) = e^{-2x}\sin 3x$

c) $f(x) = (\sin 3x + \cos 2x)^3$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + e^{\sqrt{x}}}$

e) $f(x) = \ln(\sec x + \tan x)$

f) $f(x) = \cos^3 x^3$

g) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

h) $f(x) = \frac{xe^{2x}}{\ln(3x+1)}$

Exercício 8:

Calcule $g'(x)$, sendo g dada por.

a) $g(x) = 2^{x^2} + 3^{2x}$

b) $g(x) = (2x+1)^x$

c) $g(x) = x^{\sin 3x}$

d) $g(x) = (3 + \cos x)^x$

e) $g(x) = x^x \sin x$

f) $g(x) = 10^x - 10^{-x}$

g) $g(x) = \ln(1 + x^x)$

Exercício 9:

Calcule a derivada de y, onde y é dada pela função implícita :

a) $x^2 - y^2 = 4$

b) $y^3 + x^2 y = x + 4$

c) $xy^2 + 2y = 3$

d) $x^2 y^3 + xy = 2$

e) $xe^y + xy = 3$

f) $y + \ln(x^2 + y^2) = 4$

g) $5y + \cos y = xy$

h) $2y + \sin y = x$

Exercício 10:

Determine f'' e f'''

a) $f(x) = 4x^4 + 2x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = 5x^2 - \dfrac{1}{x^3}$

d) $f(x) = 3x^3 - 6x + 1$

Lista de Exercícios 4

Cálculo 1

Professor Daniel Borin

Exercício 1:

Calcule os limites :

a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{4x^3+x^2+3}{x^5+1}$

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-x^2+x-1}{x^{10}-1}$

c) $\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^{3x}}$

f) $\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x$

g) $\lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)\ln x$

h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x - \sin x}{\sin^3 x}$

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sec^3 x}{1-\cos x}$

j) $\lim_{x\to +\infty} x^3 e^{-4x}$

k) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{x-1}$

Exercício 2:

Seja $f(x) = x^5+x+1$. Mostre que f tem pelo menos uma raiz no intervalo $[-1,0]$.

Exercício 3:

Prove que a equação $x^3-4x+2=0$ admite três raízes distintas.

Exercício 4:

Prove que a equação $x^3 - \dfrac{1}{1+x^4} = 0$ admite ao menos uma raiz real.

Exercício 5:

Examine as curvas abaixo em relação à concavidade, crescimento e descrescimento e pontos de inflexões. Use essas informações para esboçar o gráfico (OBS : Utilize um software de gráficos para conferir suas respostas. Exemplo : Geogebra)

a) $f(x) = x^3-3x^2+3x$

b) $f(x) = x^3+2x^2+1$

c) $f(x) = 3x^5-5x^3$

d) $f(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$

e) $f(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$

f) $f(x) = e^{-x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{3x^2+4x}{1+x^2}$

h) $f(x) = xe^x$

i) $f(x) = -x^4+4x^3-4x^2+2$

RESPOSTAS

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
1	2	$\frac{99}{10}$	$+\infty$	$+\infty$	0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	0	0

Lista de Exercícios 5

Cálculo 1

Professor Daniel

Exercício 1:

Determine os pontos críticos e classifique-os (ponto de máximos/mínimo local ou ponto de inflexão) referentes as funções :

a) $x(t) = \sqrt[3]{t^3 - 2t + 1}$

b) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 2x^3 + x^2 + 1}$

d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

e) $g(x) = e^{-5x}x^2$

Exercício 2:

Daniel está localizado no ponto A na margem de um lago circular com raio de 3 km quer chegar no ponto C diametralmente oposto a A do outro lado do lago no menor tempo possível. Ele pode andar a uma velocidade de 6 km/h e remar um bote a 3 km/h. Como ele deve proceder ?

Exercício 3:

Seja a velocidade da luz no ar e a velocidade da luz na água. De acordo com o Princípio de Fermat, um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que o tempo de percurso será mínimo se

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2},$$

onde (o ângulo de incidência) e (o ângulo de refração) são conforme mostrados. Essa equação é conhecida como a Lei de Snell.

Exercício 4:

Um casquinha para sorvete em forma de cone é feita de maneira a conter 27 cm^3 de sorvete. Ache a altura e o raio do copo que usa a menor quantidade possível de ingrediente.

Exercício 5:

Do ponto A, situado numa das margens de um rio, de 100 metros de largura, deve-se levar energia elétrica ao ponto C situado na outra margem do rio, 1000 metros rio abaixo. Sabendo que o fio utilizado na água custa R$ 5 o metro, e o que será utilizado fora, R$ 3 o metro ; Como deverá ser feita a ligação dos fios para que o gasto na compra dos fios seja o menor possível.

Exercício 6:

Um cliente deseja fabricar um contêiner retangular com a tampa aberta com o volume de 10 m^3 com a especificação de que o comprimento de sua base seja o dobro da largura. Sabendo que o material para a base custa R$ 10 por metro quadrado e o material para os lados custa R$ 6 por metro quadrado. Encontre o custo dos materiais para o mais barato desses contêineres.

Exercício 7:

Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

Exercício 8:

Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um triângulo equilátero com lado L se um dos lados do retângulo estiver sobre a base do triângulo.

Exercício 9:

Mostre que, de todos os triângulos isósceles com um dado perímetro, aquele que tem a maior área é o equilátero.

RESPOSTAS

	a	b	c	d	e
1	Min. Local : $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ Max. Local : $\sqrt{\frac{2}{3}}$	Inflexão : 1	Min. Local : $-\frac{1}{2}$ Max. Local : -1 e 0	Min. Local : 1	Min. Local : 0 Max. Local : $\frac{2}{5}$
2	$\theta \equiv B\hat{A}C = \pi/6$				
4	$h = \sqrt[3]{\frac{162}{\pi}}$	$r = \frac{27}{\sqrt[3]{6\pi^2}}$			
5	B está 75 m rio abaixo de A				
6	$R\$ \approx 163,54$				
7	$h = \frac{3}{2}r$	base=$\sqrt{3}r$			
8	$x = L/4$	$y = \frac{\sqrt{3}}{4}L$			